Jukka Kangasaho ◦ Jukka Mäkinen ◦ Juha Oikkonen ◦
Johannes Paasonen ◦ Maija Salmela ◦ Jorma Tahvanainen

Pitkä matematiikka 3

Geometria

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
Pitkä matematiikka 3 Geometria ISBN 978-952-63-1223-1

6 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1917-9
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1918-6

Toimitus: Ville Sipiläinen, Riitta-Liisa Eerola
Ulkoasu: Veera Alanko
Taitto: Jukka Nieminen
Piirrokset: Pekka Könönen
Kansi: Timo Jokivartio

© Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen, Maija Salmela, Jorma Tahvanainen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Lukijalle

Pitkä matematiikka

Useimmat luonnontieteiden ja tekniikan saavutukset perustuvat matematiikan tuloksiin, niin myös yhä enemmän monet yhteiskuntatieteiden ja humanististen tieteiden oivallukset. Pelkän teoreettisen uteliaisuudenkin innoittamana löydetty matemaattinen tieto on usein osoittautunut yllättävän hyödylliseksi. Matematiikassa yhdistyy kiehtovalla tavalla kaksi piirrettä: se on luovan ajattelun ja oivaltamisen leikkiä ja samalla täsmällistä ja loogista.

Pitkä matematiikka -sarjan tavoitteena on, että oppilas matematiikan tietojen ja taitojen lisäksi oppii ymmärtämään matematiikan erityisluonteen tiedonalana, jossa teoreettinen kohtaa käytännöllisen ja jossa luova oivaltaminen kohtaa täsmällisen loogisuuden.

Eteneminen

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai esimerkki. Uusi teoreettinen tieto kootaan ja perustellaan, ja lisäesimerkit opastavat tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Siten tuntityöskentelyssä voidaan usein jo aikaisessa vaiheessa siirtyä itsenäiseen harjoitteluun, jolloin opiskelijat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen. Näin menetellen kaikki opiskelijat harjaantuvat perustaidoissa, ja samalla nopeammin etenevillä on mahdollisuus tietojen ja taitojen syventämiseen. Kun opiskelijat ohjataan käyttämään hyväkseen kirjan esimerkkejä ja teoriaosuuksia, tarve vihkomuistiinpanojen tekemiseen oppitunnilla vähenee ja opiskelijat voivat paremmin keskittyä opetukseen.

Harjoittelu

Lukujen harjoitukset ovat kahtena sarjana.

Sarja I sisältää perustehtäviä, jotka harjoittavat uusia menetelmiä, tukevat teoreettisen tiedon ymmärtämistä ja juurruttamista sekä ohjaavat opitun soveltamiseen. Enimmäkseen tehtävät heijastelevat luvun esimerkkien tilanteita. Sarjaa I voidaan käyttää esimerkiksi oppitunnin aikana tapahtuvaan harjoitteluun.

Sarja II sisältää perustehtävien lisäksi vaativampia tehtäviä, joissa usein on myös matematiikan harrastamiseen innostavaa syventävää tietoa. Sarjasta II voidaan valikoida oppitunnin mittaan havaittujen tarpeiden mukaiset helpommat ja vaativammat kotitehtävät.

Kirjan esimerkit ja teoriaosuudet ovat apuna myös kotitehtävien parissa työskenneltäessä. Kaikkia tarpeellisina pidettyjä tietoja tai sovellustilanteita ei siis tarvitse käsitellä oppitunnin aikana, vaan niihin voidaan perehtyä ratkaistaessa kotitehtäviä kirjan esimerkkien avulla.

Kertaaminen

Opiskelijat voivat kerrata koko kurssin kertausluvun avulla. Luvussa käydään ensin läpi kurssin koko sisältö esimerkeillä havainnollistettuna. Sen jälkeen on samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä riittävän osaamisen takaavia perustehtäviä. Kertausluvun päättävissä tehtäväsarjoissa on vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta. Kertausluvun tehtävien vastauksissa on, kuten monien tehtävien vastauksissa kautta koko kurssin, ratkaisemista tukevia ohjeita.

Geometria

Kurssilla opiskellaan tason ja avaruuden geometriaa. Kurssilla harjaannutaan löytämään, perustelemaan ja käyttämään kuvioiden ja kappaleiden geometrisia ominaisuuksia. Tietoja sovelletaan muun muassa kulmien, janojen pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskemiseen.

Toivotamme mielenkiintoisia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 1.10.2004

Tekijät

Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 28 oppituntia.

Luku	Tuntimäärä
Kulma	1
Suunnikkaan ja kolmion kulmat	1
Yhdenmuotoisuus	2
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde	2
Suorakulmaisen kolmion trigonometria	2
Pythagoraan lause	2
Tylpän kulman kosini ja sini	1
Pinta-aloja	1
Sinilause	2
Kosinilause	2
Ympyrä	2
Ympyrän tangentti	1
Kehäkulma	1
Suorakulmainen särmiö	1
Kulma avaruudessa	2
Pallo	2
Lieriö	1
Kartio	2

Sisällys

Kulma 7
Suunnikkaan ja kolmion kulmat 16
Yhdenmuotoisuus 24
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde 34
Suorakulmaisen kolmion trigonometria 41
Pythagoraan lause 50
Tylpän kulman kosini ja sini 58
Pinta-aloja 66
Sinilause 74
Kosinilause 83
Ympyrä 91
Ympyrän tangentti 103
Kehäkulma 110
Suorakulmainen särmiö 118
Kulma avaruudessa 126
Pallo 134
Lieriö 144
Kartio 151

Kertaus 163
Kertaustehtäviä 185
Tehtäväsarjoja 192
Tehtävien vastaukset 195
Sanasto 222
Hakemisto 224
Pituuden, pinta-alan ja tilavuuden yksiköitä 227

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 (ote)

Matematiikan pitkä oppimäärä

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.

Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn ja oppii sitä kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

Geometria (MAA3)

Tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa sekä muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa
- harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita
- ratkaisee geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora-ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa.

Keskeiset sisällöt

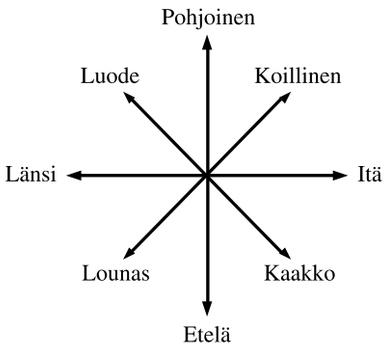
- kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus
- sini- ja kosinilause
- ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria
- kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

Kulma

Ongelma

Kompassisuunnat ilmaistaan kulmina pohjoisesta myötäpäivään. Esimerkiksi kompassisuunta $90°$ on suunta kohti itää. Mihin kompassisuuntaan kuljetaan, kun kuljetaan

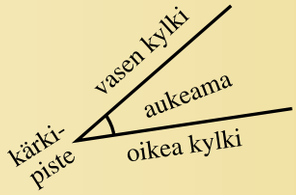
a) kaakkoon b) etelään
c) luoteeseen d) länsilounaaseen?



Tässä luvussa kerrataan perusasioita kulmista. Kulmiin liittyviä nimityksiä on myös kirjan lopussa sivulla 222 olevassa sanastossa, johon on koottu peruskoulussa opittuja geometrian käsitteitä ja kuvioiden ominaisuuksia.

Kulman määritelmä

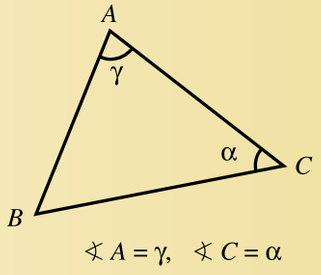
Kulma on kahden samasta pisteestä lähtevän puolisuoran rajaama tason osa.



Piste, josta puolisuorat lähtevät, on kulman *kärkipiste*, ja puolisuorat ovat kulman *kyljet*. Rajautuvaa tason osaa kutsutaan usein kulman *aukeamaksi*.

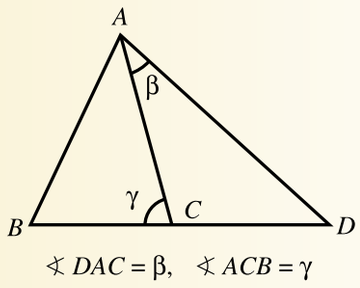
Kulman merkitseminen

Kulma voidaan merkitä kulman aukeamaan merkityllä kreikan aakkosten pienellä kirjaimella, yleensä α (alfa), β (beeta), γ (gamma) tai δ (delta), tai kulman kärkipisteen ilmaisevalla kirjaimella.



$\sphericalangle A = \gamma, \quad \sphericalangle C = \alpha$

Kulma voidaan merkitä myös kolmella kirjaimella, joista ensimmäinen ja kolmas ilmaisevat pisteet kulman kyljiltä ja keskimmäinen ilmaisee kulman kärkipisteen.*



Yleensä vielä täsmennetään kulman aukeamaan piirretyllä yhdellä tai useammalla kaarella, mitä kulmaa tarkoitetaan.

Kulman suuruus

Kulman suuruuden tavallisin mittayksikkö on *aste* (laskimessa deg tai D). Täysikulman suuruus on 360 astetta eli 360°, joten oikokulman suuruus on 180° ja suorakulman 90°.**

Asteen osat ilmaistaan nykyisin yleensä desimaaleilla kuten muidenkin mittayksikköjen osat (poikkeuksena ajan yksiköt). Esimerkiksi 108,43° on satakahdeksan kokonaista astetta ja 43 asteen sadasosaa.

Joissain yhteyksissä, esimerkiksi maapallon pituus- ja leveyspiirien kuvailussa, on vielä käytössä perinteinen tapa ilmaista asteen osat minuutteina (kulmaminuutteina) ja sekunteina (kulmasekunteina).

Yksi *minuutti* (1′) on asteen kuudeskymmenesosa. Siis yksi aste on 60 minuuttia, $1° = 60′$.

Yksi *sekunti* (1″) on minuutin kuudeskymmenesosa. Siis yksi minuutti on 60 sekuntia, $1′ = 60″$ ja $1° = 3\,600″$.

---

* Joskus noudatetaan sopimusta, jonka mukaan kulman oikealla kyljellä oleva piste merkitään ensimmäiseksi. Tässä kirjassa tätä sopimusta ei noudateta.

** Muita kulman suuruuden mittayksikköjä ovat *gooni* eli *uusaste* (laskimessa grad tai G) ja *radiaani* (laskimessa rad tai R). Täysikulma on 400 goonia ja erityisesti siis suorakulma on 100 goonia. Goonia käytetään usein teknisissä mittauksissa. Aste ja gooni ovat tietyssä mielessä mielivaltaisia yksikköjä, sillä ne on otettu käyttöön lukujen 360 ja 400 etujen vuoksi. Radiaani on sen sijaan monien matematiikan alueiden kannalta kulman suuruuden ”luonnollinen” yksikkö. Radiaaniin perehdytään kurssissa Trigonometriset funktiot ja lukujonot. Yksi radiaani on $\frac{180}{\pi}$ astetta eli noin 57,2958 astetta.

ESIMERKKI 1

Ilmaise kulma $108° 47′ 5″$ desimaalimuodossa neljän desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu

Asteen osat $47′ 5″$ ilmaistaan sekunteina.

$$47′ 5″ = 47 \cdot 60″ + 5″ \qquad 1′ = 60″$$

$$= 2\,825″$$

Siis

$$108° 47′ 5″ = 108\frac{2\,825}{3\,600}° \qquad 1″ = \frac{1}{3\,600}°$$

$$\approx 108{,}7847°.$$

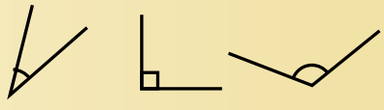
Vastaus

$108{,}7847°$

Kulmien luokittelu

Kulma, joka on suurempi kuin nollakulma ja pienempi kuin oikokulma, on *kovera* kulma.

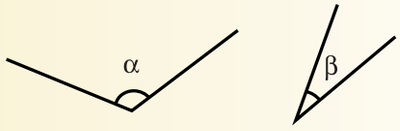
Kovera kulma voi olla *terävä*, *suorakulma* tai *tylppä*.

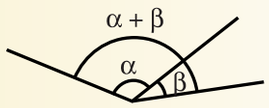


Kulma, joka on suurempi kuin oikokulma ja pienempi kuin täysikulma, on *kupera* kulma.

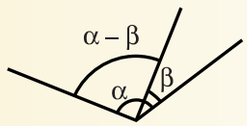
Kulmien summa ja erotus

Kahden kulman α ja β *summa* $\alpha + \beta$ on kulma, joka muodostuu, kun kulmat asetetaan vierekkäin niin, että kärjet ja toiset kyljet yhtyvät.



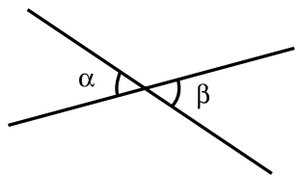


Kulmien α ja β *erotus* voidaan muodostaa, jos $\alpha > \beta$. Erotus on kulma, joka jää jäljelle, kun kulmat asetetaan sisäkkäin niin, että toiset kyljet yhtyvät.



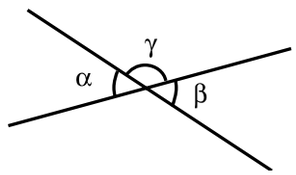
ESIMERKKI 2

Kaksi suoraa leikkaa toisensa. Osoita, että muodostuvat ristikulmat α ja β ovat yhtä suuret.



Ratkaisu

Merkitään toista ristikulmien α ja β väliin jäävistä kulmista kirjaimella γ. Kulmat α ja β voidaan ilmaista kulman γ avulla.



Kulmien α ja γ summa on oikokulma.

$\alpha + \gamma = 180°$, joten $\alpha = 180° - \gamma$.

Myös kulmien β ja γ summa on oikokulma.

$\beta + \gamma = 180°$, joten $\beta = 180° - \gamma$.

Siis $\alpha = \beta$,

mikä oli todistettava.*

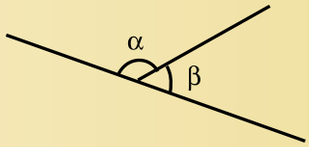
---

* Loppuunsaatettu osoitus (todistus) päätetään usein toteamalla juhlallisesti: Mikä oli todistettava. Tämä voidaan myös lyhentää m.o.t. tai latinaksi q.e.d. (quod erat demonstrandum). Voidaan myös käyttää merkkiä □.

Kulmalaskut ja geometriset perustelut nojautuvat usein siihen, että kulmien havaitaan olevan vieruskulmia, ristikulmia tai samankohtaisia kulmia.

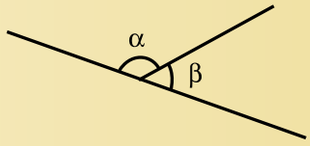
Vieruskulmat

Koverat kulmat, joiden toinen kylki on yhteinen ja toiset kyljet muodostavat suoran, ovat *vieruskulmia*.



Seuraava lause seuraa suoraan vieruskulmien ja kulmien summan määritelmistä.

Vieruskulmalause

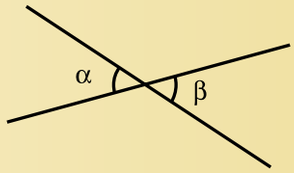


Vieruskulmien summa on oikokulma.

$\alpha + \beta = 180°$

Ristikulmat

Kun kaksi suoraa leikkaa toisensa, muodostuvat vastakkaiset kulmat ovat *ristikulmia*.



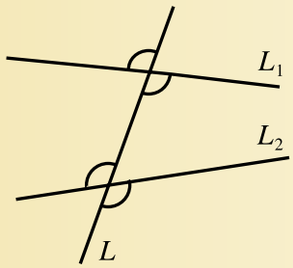
Seuraava lause todistettiin esimerkissä 2.

Ristikulmalause

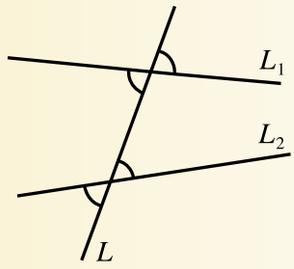
Ristikulmat ovat yhtä suuret.

Samankohtaiset kulmat

Kun suora L leikkaa kahta muuta suoraa L_1 ja L_2, muodostuu kahdeksan koveraa kulmaa. Näistä neljän kulman oikea kylki on suoralla L ja neljän kulman vasen kylki suoralla L.



Oikea kylki on suoralla L.



Vasen kylki on suoralla L.

Kulmat, joiden *samanniminen* kylki (siis molemmilla oikea kylki tai molemmilla vasen kylki), on suoralla L, ovat keskenään *samankohtaisia* kulmia.

Muodostuvista kulmista siis neljä ovat keskenään samankohtaisia ja toiset neljä samoin keskenään samankohtaisia.

Lause samankohtaisista kulmista ja suorien yhdensuuntaisuudesta

> Kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos samankohtaiset kulmat, jotka muodostuvat, kun kolmas suora leikkaa niitä molempia, ovat yhtä suuret.

Lause otetaan käyttöön ilman todistusta.*

Lause sisältää kaksi eri tietoa:

1° Jos suorat ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

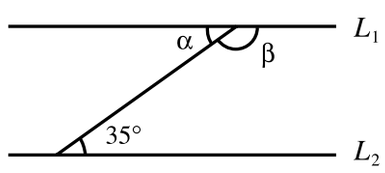
2° Jos samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, niin suorat ovat yhdensuuntaiset.

---

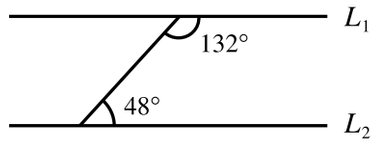
* Matemaattinen tieto ilmaistaan yleensä ns. *lauseina*. Lauseet perustellaan tosiksi eli *todistetaan* aikaisemman tiedon pohjalta. Koko rakennelman perustana ovat joidenkin keskeisten käsitteiden (esimerkiksi pisteen, suoran ja suorien yhdensuuntaisuuden) *määritelmät* ja niiden muutamat ilman todistusta hyväksytyt ominaisuudet, niin sanotut *aksioomat*. Tasogeometrialle voidaan laatia erilaisia tällaisia ns. *aksioomajärjestelmiä*. Lauseen todistaminen edellyttäisi jonkin aksioomajärjestelmän käyttöönottoa.

ESIMERKKI 3

a) Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset. Kuinka suuret kulmat α ja β ovat?

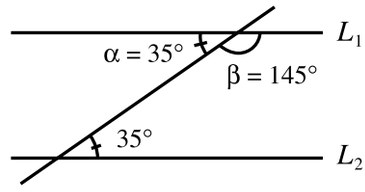


b) Ovatko suorat L_1 ja L_2 yhdensuuntaiset?



Ratkaisu

a) Kulma α ja 35°:n kulma ovat samankohtaisia kulmia. Koska suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset, niin $\alpha = 35°$.*

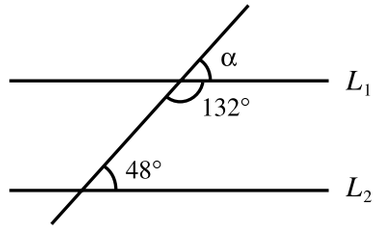


Kulma β on kulman α vieruskulma, joten

$\beta = 180° - 35° = 145°$.

b) Kulma α ja 48°:n kulma ovat samankohtaisia kulmia. Koska kulma α on 132°:n kulman vieruskulma, niin

$\alpha = 180° - 132° = 48°$.



Koska samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset.

Vastaus

a) $\alpha = 35°$, $\beta = 145°$ b) Ovat.

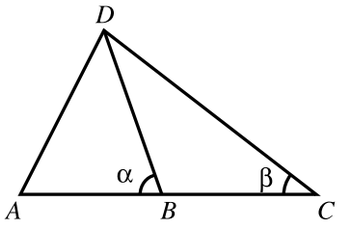
---

* Kuviossa on merkitty, kuten usein on tapana, yhtä suuret kulmat samanlaisilla merkinnöillä käyttämällä pieniä poikkiviivoja.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

1. Merkitse kulmat α ja β, jos mahdollista, myös yhdellä ja kolmella kirjaimella.



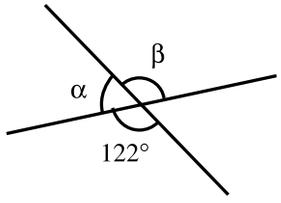
2. Onko kulma α kupera, kovera, terävä tai tylppä, jos kulman α suuruus on

a) 300° b) 35°
c) 182° d) 170°?

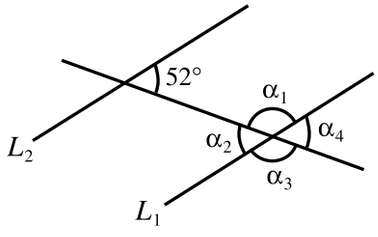
3. Muuta kulman suuruus tavalliseen desimaalimuotoon.

a) 83° 28′ b) 7° 54′ 21″

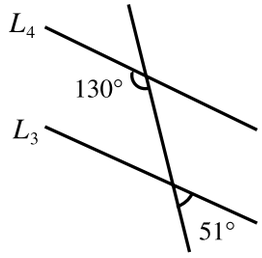
4. Määritä kulmien α ja β suuruudet.



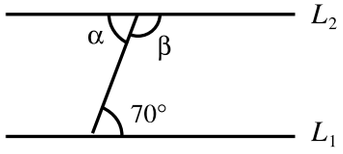
5. a) Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset. Kuinka suuret kulmat α_1, α_2, α_3 ja α_4 ovat?



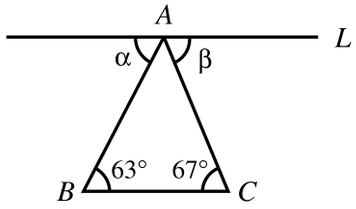
b) Ovatko suorat L_3 ja L_4 yhdensuuntaiset?



6. a) Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset. Kuinka suuret kulmat α ja β ovat?



b) Kuinka suuret kulmat α ja β ovat silloin, kun suora L on yhdensuuntainen kolmion ABC sivun BC kanssa?



7. Kompassisuunnat ilmaistaan kulmina pohjoisesta myötäpäivään. Mihin ilmansuuntaan kuljetaan, jos kompassisuunta on a) 45°
b) 225°?
c) Laiva kulkee kompassisuuntaan 341° ja muuttaa suuntaansa kääntymällä 28° styyrpuuriin (oikealle). Mihin kompassisuuntaan laiva nyt kulkee?
d) Lentokone laskeutuu kiitoradalle lentäen kompassisuuntaan 107°. Mihin kompassisuuntaan lennetään, kun kiitoradalle laskeudutaan vastakkaisesta suunnasta?
e) Kompassisuunta paikasta A paikkaan B on α. Mikä on kompassisuunta paikasta B paikkaan A?

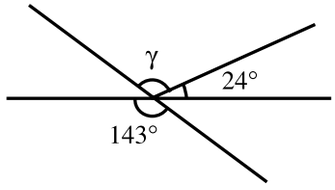
SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

8. Piirrä
a) viisikulmio, jossa on yksi kupera kulma ja neljä koveraa kulmaa, joista yksi on suorakulma ja kaksi on tylppiä kulmia
b) kuusikulmio, jossa on kolme kuperaa kulmaa ja kolme koveraa kulmaa, joista yksi on suorakulma.

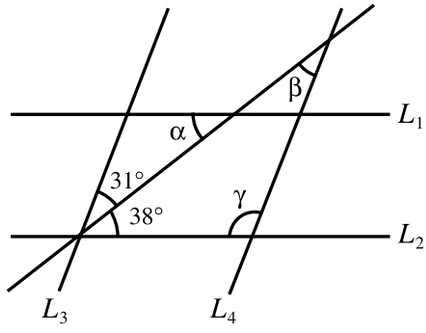
9. Muuta kulman suuruus tavalliseen desimaalimuotoon.
a) $60° \; 18{,}1'$ (Märketin majakan leveyspiiri)
b) $19° \; 8{,}2'$ (Märketin majakan pituuspiiri)

10. Ilmaise kulma $72{,}8257°$
a) asteina ja minuutteina minuuttien tarkkuudella
b) asteina, minuutteina ja sekunteina sekuntien tarkkuudella.

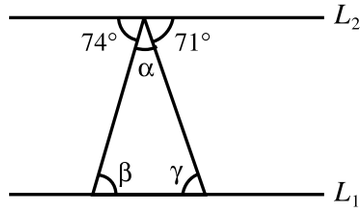
11. Määritä kulman γ suuruus.



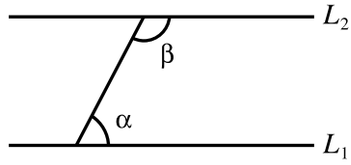
12. Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset samoin kuin suorat L_3 ja L_4. Kuinka suuret kulmat α, β ja γ ovat?



13. Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset. Kuinka suuret kulmat α, β ja γ ovat? Vaikka varmaan tiedät, kuinka suuri kolmion kulmien summa on, niin älä kuitenkaan käytä tietoa hyväksi.



14. Osoita, että
a) jos suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset, niin kulmien α ja β summa on oikokulma
b) jos kulmien α ja β summa on oikokulma, niin suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset.



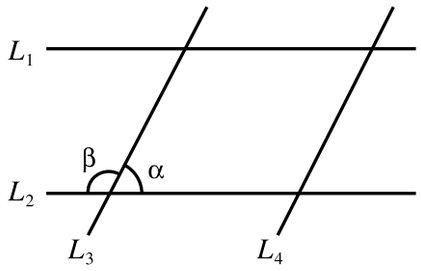
15. Moottorivenekilpailun kolmion muotoinen reitti ajetaan niin, että ensin ajetaan pisteestä A pisteeseen B kompassisuunnassa $32°$, sitten pisteestä B pisteeseen C kompassisuunnassa $287°$ ja lopuksi pisteestä C pisteeseen A kompassisuunnassa $142°$. Kuinka suuret kolmion ABC kulmat ovat? Kompassisuunnat ovat kulmia pohjoisesta myötäpäivään.

16. Määritä sekunnin tarkkuudella kello 12:n ja 13:n väliltä ne kellonajat, jolloin kellon tunti- ja minuuttiviisarit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Suunnikkaan ja kolmion kulmat

Ongelma 1

Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset samoin kuin suorat L_3 ja L_4. Merkitse kuvioon kaikki kulmat, jotka ovat yhtä suuria kuin a) kulma α b) kulman α vieruskulma β.



Suunnikkaan määritelmä

Suunnikas on nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

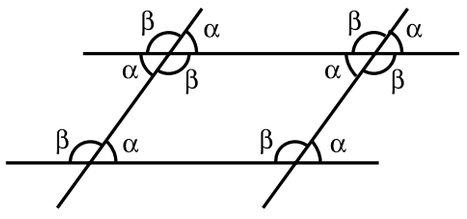
ESIMERKKI 1

Osoita, että suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on $180°$.

Ratkaisu

Merkitään suunnikkaan yhtä kulmaa α.*

Jatketaan suunnikkaan sivuja ja merkitään kulman α vieruskulmaa β. Koska suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, kuvioon muodostuvat samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.



Siis suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Koska vieruskulmien summa on $180°$, niin suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on $180°$. □

---

* Kun todistusta varten piirretään mallikuva, niin tällöin ei tule piirtää suunnikkaan erikoistapausta (esimerkiksi suorakulmiota).

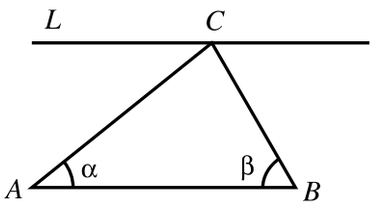
Esimerkissä 1 todistettiin lause suunnikkaan kulmista.

Suunnikkaan kulmat

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on $180°$.

Ongelma 2

Suora L ja jana AB ovat yhdensuuntaiset. Merkitse kuvioon kulma, jonka kärki on pisteessä C ja joka on yhtä suuri kuin
a) kulma α b) kulma β.

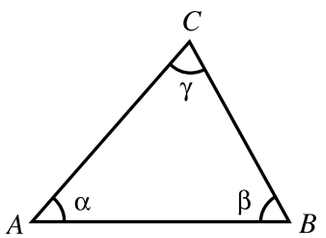


ESIMERKKI 2

Todista, että kolmion kulmien summa on oikokulma.

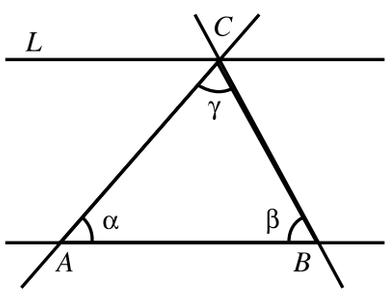
Ratkaisu

Merkitään kolmion kärkiä A, B ja C ja kulmia α, β ja γ.

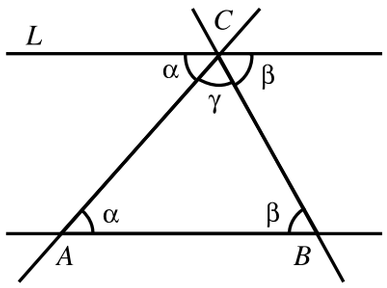


Täydennetään kuvio *apupiirroksella:*

Piirretään kärjen C kautta sivun AB suuntainen suora L ja jatketaan kolmion sivuja.

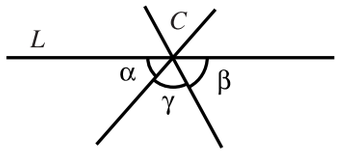


Koska suora L on yhdensuuntainen sivun AB määräämän suoran kanssa, niin samankohtaiset kulmat, jotka muodostuvat sivun AC määräämän suoran leikatessa niitä, ovat yhtä suuret. Erityisesti kuvioon merkitty kulman α kanssa samankohtainen kulma on yhtä suuri kuin α.



Vastaavasti samankohtaiset kulmat, jotka muodostuvat sivun BC määräämän suoran leikatessa, ovat yhtä suuret. Erityisesti kuvioon merkitty kulman β kanssa samankohtainen kulma on yhtä suuri kuin β.

Siis kulmien α, β ja γ summa on oikokulma eli $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. □



Esimerkissä 2 todistettiin lause kolmion kulmien summasta.

Kolmion kulmien summa

> Kolmion kulmien summa on oikokulma, eli kolmion kulmien astelukujen summa 180°.

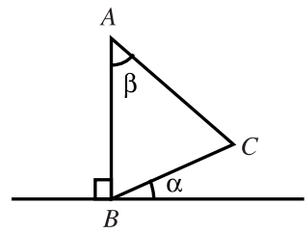
ESIMERKKI 3

Tasakylkisen kolmion kannan päätepisteen kautta piirretään suora, joka on kohtisuorassa samaan pisteeseen päättyvää kolmion kylkeä vastaan. Osoita, että suoran ja kolmion kannan välinen kulma on puolet kolmion huippukulmasta.*

Ratkaisu

Piirretään mallikuva. Kuviossa AB ja AC ovat tasakylkisen kolmion kyljet eli $AB = AC$.

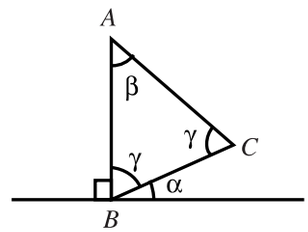
Tehtävänä on osoittaa, että $\alpha = \frac{\beta}{2}$ eli $\beta = 2\alpha$.



Ilmaistaan kulma β kulman α avulla käyttämällä hyväksi kuvion ominaisuuksia.

Merkitään $\sphericalangle ABC = \gamma$.

Tasakylkisen kolmion kantakulmina kulmat BCA ja ABC ovat yhtä suuret, joten myös $\sphericalangle BCA = \gamma$.



Kulmien α ja γ summa on suorakulma, joten $\gamma = 90° - \alpha$.

Koska kolmion kulmien summa on $180°$, niin

$$\beta = 180° - 2\gamma \qquad \text{Sijoitetaan } \gamma = 90° - \alpha.$$
$$= 180° - 2(90° - \alpha)$$
$$= 180° - 180° + 2\alpha = 2\alpha.$$

Siis $\beta = 2\alpha$. □

---

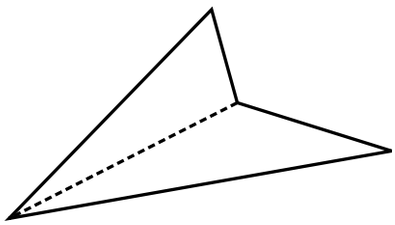
* Perusasteella opitut tasakylkisen kolmion osien nimitykset ja ominaisuudet on kerrattu sivulla 222 olevassa sanastossa.

ESIMERKKI 4

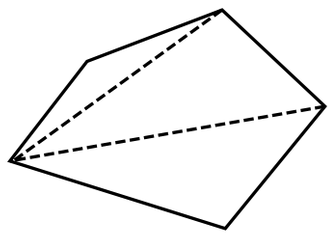
Kuinka suuri on a) nelikulmion b) viisikulmion kulmien summa?

Ratkaisu

a) Lävistäjä jakaa nelikulmion kahdeksi kolmioksi. Nelikulmion kulmien summa on yhtä suuri kuin kahden kolmion kulmien summa:
$180° + 180° = 360°$.



b) Samasta kärjestä lähtevät kaksi lävistäjää jakavat viisikulmion kolmeksi kolmioksi. Viisikulmion kulmien summa on yhtä suuri kolmen kolmion kulmien summa:
$3 \cdot 180° = 540°$.



Vastaus

a) $360°$ b) $540°$

Esimerkin 4 päättely voidaan yleistää kaikille sellaisille monikulmioille, joiden jokainen kulma on kovera: n-kulmion yhdestä kärjestä lähtevät $n - 3$ lävistäjää kulkevat kaikki n-kulmion sisällä ja jakavat monikulmion kolmioiksi. Kolmioiden lukumäärä on $n - 2$. Siis kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180°$.

Voidaan osoittaa, että sama kaava pätee myös monikulmioille, joissa on kuperia kulmia.*

Monikulmion kulmien summa

n-kulmion kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180°$.

---

* Yleinen todistus vaatii toisenlaisen menetelmän, sillä kun $n \geqslant 6$, n-kulmiossa ei välttämättä ole yhtään kärkeä, josta piirretyt kaikki lävistäjät kulkevat monikulmion sisällä.

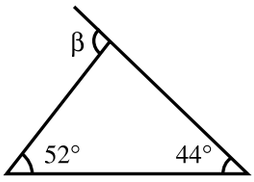
TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

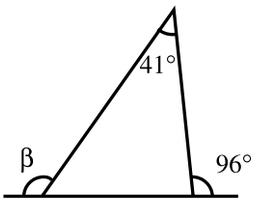
17. Suunnikkaassa $ABCD$ on $\sphericalangle A = 23°$. Kuinka suuret suunnikkaan muut kulmat ovat?

18. Kuinka suuri kulma β on?

a)



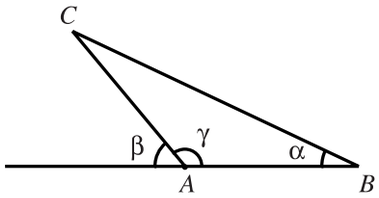
b)



19. Kulma, jossa jana AB *näkyy pisteestä* P (niin sanottu *näkökulma*) on pisteestä P janan AB päätepisteisiin piirrettyjen janojen välinen kulma. Oletetaan, että $\sphericalangle APB = 43°$ ja $\sphericalangle PAB = 82°$. Missä kulmassa
a) jana AB näkyy pisteestä P
b) jana AP näkyy pisteestä B?

20. Kolmiossa ABC on $BA = BC$.
a) Kuinka suuri kolmion kulma B on, jos kulman A suuruus $17°$?
b) Kuinka suuri kolmion kulma A on, jos kulman B suuruus on $112°$?

21. Kulmat β ja γ ovat vieruskulmia, ja janat AB ja AC ovat yhtä pitkät. Osoita, että $\beta = 2\alpha$.



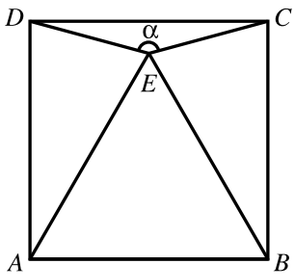
22. Tasakylkisen kolmion kannan päätepisteestä piirretään kolmion korkeusjana. Osoita, että korkeusjanan ja kannan välinen kulma on puolet kolmion huippukulmasta.

23. Kolmion yksi kulma on $72°$. Kuinka suuri on kolmion kahden muun kulman puolittajien välinen terävä kulma?

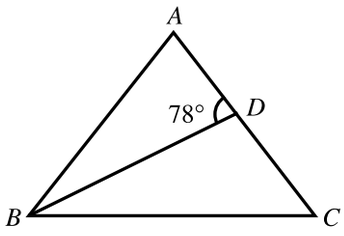
24. Kuinka suuri on a) kuusikulmion
b) seitsenkulmion kulmien summa?
c) Jos viisikulmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret, niin kuinka suuret ne ovat? Entä kuinka suuria ovat kahdeksankulmion kulmat, jos ne kaikki ovat yhtä suuret?

25. a) Kuinka monta kuperaa kulmaa viisikulmiossa voi olla? Perustele. Piirrä viisikulmio, jossa on suurin mahdollinen määrä kuperia kulmia.
b) Kuinka monta suoraa kulmaa viisikulmiossa voi olla? Perustele. Piirrä viisikulmio, jossa on suurin mahdollinen määrä suoria kulmia.

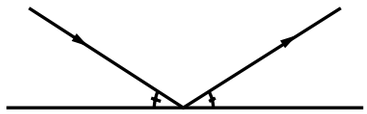
26. Nelikulmio $ABCD$ on neliö, ja kolmio ABE on tasasivuinen. Kuinka suuri kulma α on?



27. Kolmio ABC on tasakylkinen, ja jana BD puolittaa kolmion kantakulman ABC. Kuinka suuri kolmion huippukulma A on?



28. Kun valonsäde heijastuu tasaisesta pinnasta, se jättää pinnan samassa kulmassa, jossa se kohtaa pinnan.

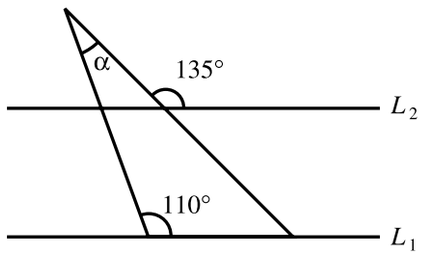


Pystysuorat peilit ovat $50°$:n kulmassa. Vaakasuora valonsäde saapuu peileihin toisen peilin suuntaisena. Tutki, kuinka valonsäde heijastuu peileistä.

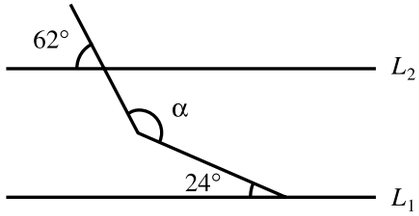
SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

29. Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset. Kuinka suuri kulma α on?

a)



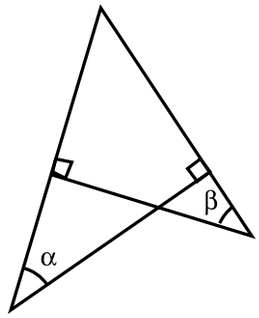
b)



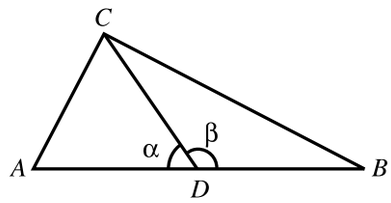
30. Tasakylkisen kolmion ABC huippukulma on $\sphericalangle A = 104°$. Missä kulmassa kolmion kylki AB näkyy a) pisteestä C b) kolmion kannan keskipisteestä?
Näkökulma on määritelty tehtävässä 19.

31. Kolmion kahden kulman suuruudet ovat $56° 42' 18''$ ja $72° 19' 54''$. Kuinka suuri kolmion kolmas kulma on?

32. Osoita, että kulmat α ja β ovat yhtä suuret.



33. Kulmat α ja β ovat vieruskulmia, ja janat DA, DB ja DC ovat yhtä pitkät. Osoita, että kulma ACB on suorakulma.

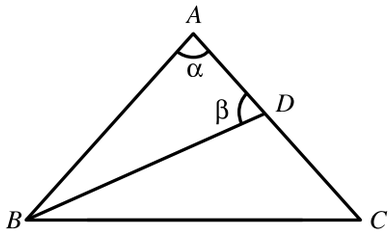


34. Osoita, että suunnikkaan vierekkäisten kulmien puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

35. Kolmion ABC sivulta BC tai tarvittaessa (kun sivu BC on lyhyempi kuin sivu BA) sivun BC jatkeelta valitaan piste P niin, että $BP = BA$. Vastaavasti valitaan sivun BC tai sen jatkeen piste Q niin, että $CQ = CA$.
Osoita, että kolmion PAQ kulma A on kolmion ABC kulmien B ja C keskiarvo.

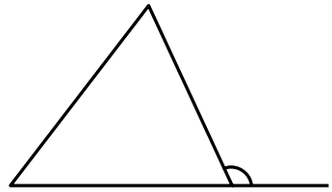
36. Kolmiossa ABC sivu BC on kaksi kertaa niin pitkä kuin sivu AB ja kulman B suuruus on $60°$. Kuinka suuret kolmion muut kulmat ovat?

37. Kuvion kolmio ABC on tasakylkinen, kulma α on huippukulma, ja jana BD puolittaa kantakulman.
a) Ilmaise kulma β huippukulman α lausekkeena. Millä välillä kulman β suuruus voi vaihdella?
b) Millä α:n arvoilla kolmio ABD on tasakylkinen?



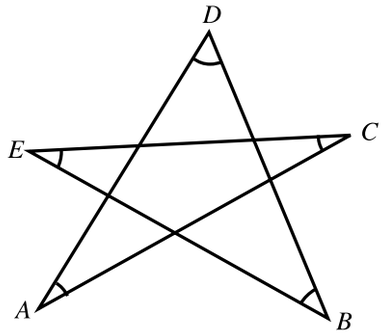
38. Todista, että nelikulmio, jonka vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, on suunnikas.

39. Kun kolmion sivua jatketaan yli kärjen, sivun jatke ja kärkeen päättyvä toinen sivu muodostavat kolmion niin sanotun *ulkokulman.*



a) Osoita, että ulkokulman suuruus ei riipu siitä, kumpaa kärkeen päättyvää sivua jatketaan.
b) Osoita, että kolmion ulkokulmien summa on täysikulma.
c) Ulkokulma voidaan määritellä samalla tavalla myös muiden monikulmioiden kulmille, jos kulmat ovat koveria. Osoita, että jos monikulmion kaikki kulmat ovat koveria, niin monikulmion ulkokulmien summa on täysikulma.

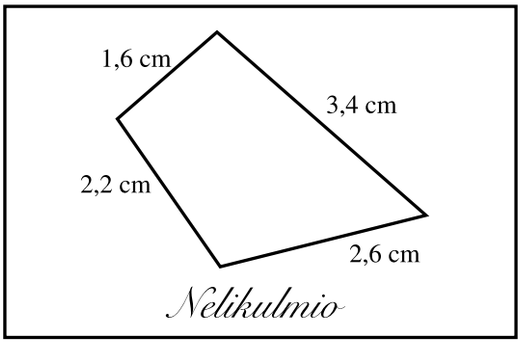
40. Osoita, että kulmien A, B, C, D ja E summa on oikokulma.

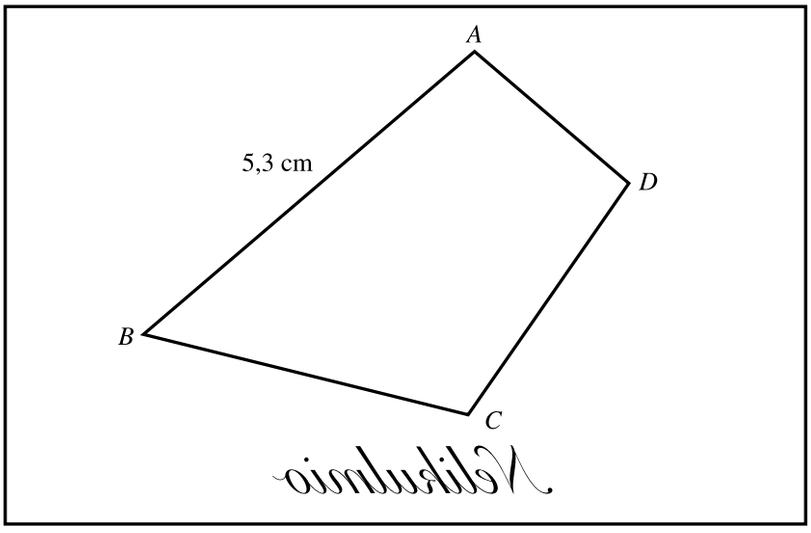


Yhdenmuotoisuus

Ongelma

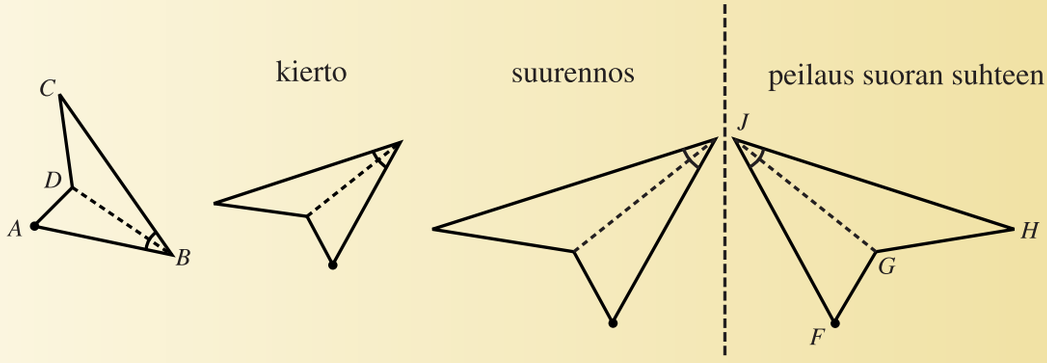
Valokopiokoneella kuvio voidaan kopioida pienennettynä tai suurennettuna. Kalvolle piirretty kuvio kopioitiin paperille suurennettuna. Kopioitaessa kalvo oli erehdyksessä nurinpäin. Suurennetusta kuviosta mitattiin sivu AB. Laske suurennetun kuvion muiden sivujen pituudet.





Yhdenmuotoisuus

Kuviot, jotka saadaan toisistaan siirtämällä, kiertämällä, suurentamalla, pienentämällä tai peilaamalla, ovat *yhdenmuotoiset*.



Piste, joksi alkuperäisen kuvion piste kulkeutuu näissä toimituksissa, on *vastinpiste*. Janan päätepisteiden vastinpisteitä yhdistävä jana on *vastinjana* ja kulman kylkien vastinjanojen välinen kulma on *vastinkulma*.

Yllä olevat nelikulmiot $ABCD$ ja $FGHJ$ ovat yhdenmuotoiset. Pisteen A vastinpiste on F, B:n vastinpiste on J ja C:n H.

Sivun AB vastinjana on FJ, sivun BC vastinjana on JH, lävistäjän BD vastinjana on JG jne.

Kulman CBA vastinkulma on kulma HJF, kulman BCD kulma JHG jne.

Yhdenmuotoisten kuvioiden kulmat

Yhdenmuotoisissa kuvioissa kulma ja sen vastinkulma ovat yhtä suuret.

Yllä olevissa kuviossa on esimerkiksi $\sphericalangle CBA = \sphericalangle HJF$.

Yhdenmuotoisten kuvioiden janat

Kun yhdenmuotoisissa kuvioissa muodostetaan mikä tahansa suhde

$$\frac{\text{vastinjanan pituus}}{\text{janan pituus}}$$

, niin suhde on aina sama.

Suhde on *yhdenmuotoisuussuhde* eli *mittakaava*.

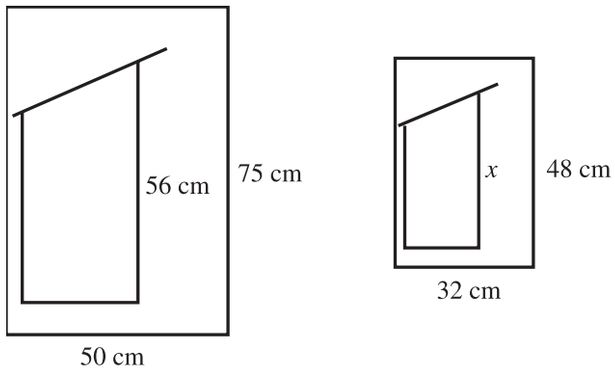
Yllä olevissa kuvioissa on esimerkiksi $\frac{FJ}{AB} = \frac{JH}{BC}$ ja $\frac{JH}{BC} = \frac{GJ}{BD}$.

Janojen pituuksien määrittäminen

Jos tunnetaan janan pituus, niin vastinjanan pituus ratkaistaan verrantoyhtälöllä. Edellytyksenä on, että yhdenmuotoisuussuhde (mittakaava) on joko annettu tai että se voidaan määrittää yhden jana-vastinjana -parin avulla.

ESIMERKKI 1

Linnunpöntön luonnolliseen kokoon laaditusta mallipiirroksesta tehtiin kopiokoneella pienennös pienempää lintua varten. Mikä on pöntön korkeus pienennöksessä?



Ratkaisu

Kun kuviota pienennetään, se säilyy yhdenmuotoisena. Siten korkeuden x suhde korkeuteen 56 cm on yhtä suuri kuin piirustusten korkeuksien 48 cm ja 75 cm (tai leveyksien 32 cm ja 50 cm) suhde.

$$\frac{x}{56} = \frac{48}{75}$$ Kerrotaan ristiin.

$$75x = 56 \cdot 48$$

$$x = \frac{56 \cdot 48}{75} \approx 36 \text{ (cm)}$$

Vastaus

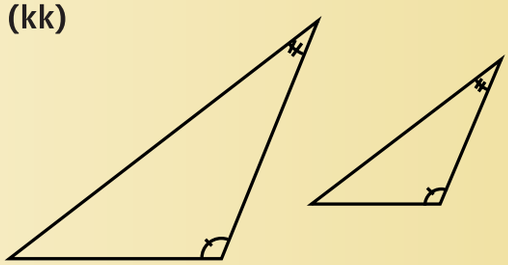
36 cm

Kolmioiden yhdenmuotoisuus

Kolmion kulmat määräävät täydellisesti kolmion muodon. Jos kahden kolmion kulmat ovat parittain yhtä suuret, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Koska kulmien summa on kaikissa kolmioissa oikokulma, niin jo kahden kulmaparin yhtäsuuruus takaa kolmansien kulmien yhtäsuuruuden. Siis pätee:

Kolmioiden yhdenmuotoisuuslause (kk)

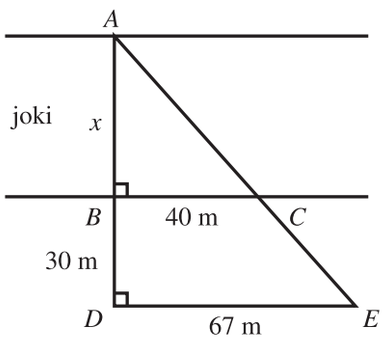
Jos kolmion kahta kulmaa vastaavat yhtä suuret kulmat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.



Lauseeseen vedottaessa siitä käytetään usein lyhennettä kk (kaksi kulmaa).

ESIMERKKI 2

Joen leveyden määrittämiseksi suoritettiin kuvion mukaiset mittaukset käyttämällä kiintopisteenä vastarannalla pisteessä A olevaa kiveä. Määritä joen leveys x.



Ratkaisu

Kolmioissa ABC ja ADE on kaksi yhtä suurta kulmaa:
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE$ (molemmat suoria kulmia)
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAE$ (kolmioiden yhteinen kulma).

Siis kolmiot ABC ja ADE ovat yhdenmuotoiset (kk).

Muodostetaan ja ratkaistaan verrantoyhtälö.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

Janan AB vastinjana on AD, ja janan BC vastinjana on DE.

$$\frac{x}{x+30} = \frac{40}{67}$$

Kerrotaan ristiin.

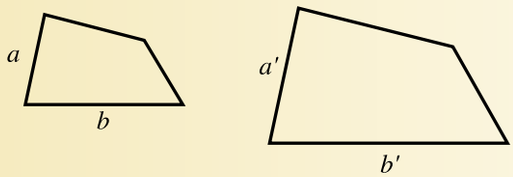
$$67x = 40(x + 30)$$
$$67x = 40x + 1200$$
$$27x = 1200 \qquad | : 27$$
$$x \approx 44 \text{ (m)}$$

Vastaus 44 m

Yhdenmuotoisista kuvioista voidaan muodostaa verrantoyhtälöitä myös toisella tavalla.

Alla olevat kuviot ovat yhdenmuotoiset, joten jokaisen janan ja sen vastinjanan pituuksien suhde on sama. Siis

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$



Yhtälö $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ on yhtäpitävä ristiin kertomalla saatavan yhtälön $ab' = a'b$ kanssa.

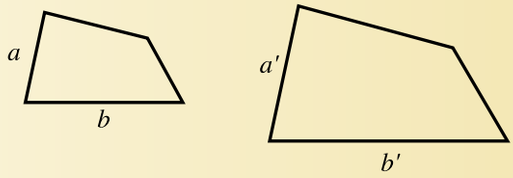
Toisaalta myös verrantoyhtälö $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ johtaa ristiin kerrottaessa samaan yhtälöön $ab' = a'b$, joten yhtälö $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ on yhtäpitävä yhtälön $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ kanssa.

Yhtälössä $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ on vasemmalla puolella saman kuvion kahden janan pituuksien suhde ja oikealla puolella näiden janojen vastinjanojen pituuksien suhde.

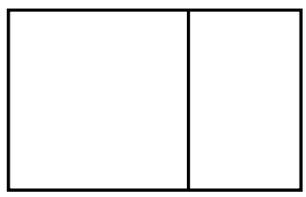
Toinen keino muodostaa verranto

Jos kuviot ovat yhdenmuotoiset, niin saman kuvion kahden janan suhde on yhtä suuri kuin niiden toisessa kuviossa olevien vastinjanojen suhde.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$



ESIMERKKI 3

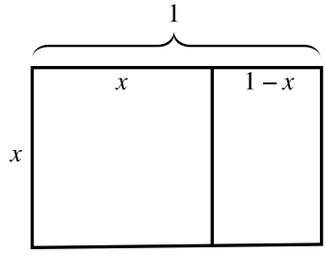


Jo antiikin ajan kreikkalaiset pitivät esteettisesti miellyttävänä suorakulmiota, jonka muoto täyttää seuraavan ehdon: Kun suorakulmiosta erotetaan lyhyemmän sivun suuntaisesti neliö, niin jäljelle jäävä suorakulmio on yhdenmuotoinen koko suorakulmion kanssa. Ehdon täyttävä suorakulmio on *kultainen suorakulmio*.

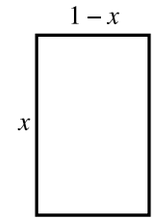
a) Jos kultaisen suorakulmion pitemmän sivun pituus on 1, niin kuinka pitkä suorakulmion lyhyempi sivu on?
b) Ateenassa Akropoliin kukkulalla olevan Parthenonin temppelin pääty on kultaisen suorakulmion muotoinen. Päädyn leveys on 30 m. Kuinka korkea temppelin pääty on?

Ratkaisu

a) Olkoon kultaisen suorakulmion lyhyemmän sivun pituus x. Erotetaan suorakulmiosta neliö.



Muodostetaan sekä alkuperäisessä että siitä erottuvassa suorakulmiossa lyhyemmän sivun pituuden suhde pitemmän sivun pituuteen. Koska suorakulmiot ovat yhdenmuotoiset, suhteet ovat yhtä suuret.*



$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618$$

Vain positiivinen juuri voi olla sivun pituus. Jos pitemmän sivun pituus on 1, niin lyhyemmän sivun pituus on $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$.

b) a-kohdan perusteella kultaisen suorakulmion lyhyemmän sivun pituus on noin 61,8 % pitemmän sivun pituudesta. Jos temppelin leveys on 30 m, niin korkeus on $0{,}618 \cdot 30\ \text{m} \approx 19\ \text{m}$.

Vastaus

a) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$** b) 19 m

---

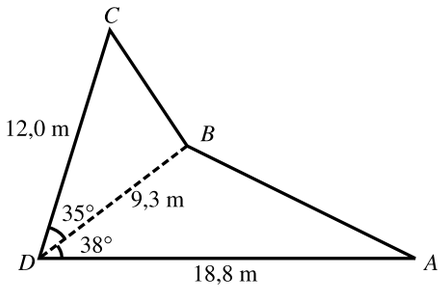
* Nyt siis muodostetaan verrantoyhtälö vertaamalla kuvioiden sisällä muodostettuja suhteita. Jos verrattaisiin suhteita $\frac{\text{jana}}{\text{vastinjana}}$, saataisiin yhtäpitävä yhtälö $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$.

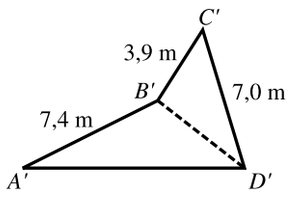
** Ratkaisusta käy ilmi, että kultaisen suorakulmion jako neliöön ja suorakulmioon jakaa suorakulmion pitemmän sivun kultaisen leikkauksen suhteessa: lyhyemmän osan pituuden suhde pitemmän osan pituuteen on yhtä suuri kuin pitemmän osan pituuden suhde koko janan pituuteen. Kultaista leikkausta on käsitelty kurssissa Polynomifunktiot.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

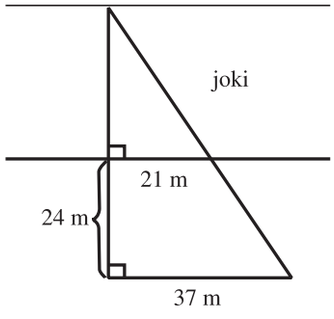
41. Nelikulmiot $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ ovat yhdenmuotoiset.
a) Laske sivun AB pituus.
b) Laske lävistäjän $B'D'$ pituus.
c) Kuinka suuri kulma $C'D'A'$ on?



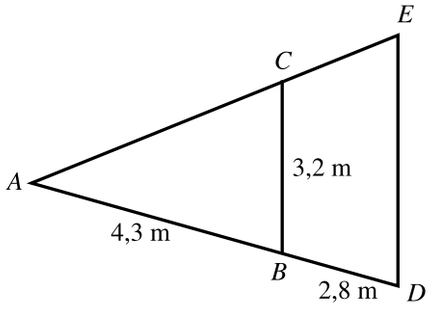


42. Mitä etäisyyttä luonnossa vastaa 8,2 cm:n etäisyys kartalla, jonka mittakaava on
a) 1 : 15 000 (suunnistuskartta)
b) 1 : 50 000 (useat ulkoilukartat)?
Helsingin ja Hämeenlinnan etäisyys on 96 km. Mikä on kaupunkien välinen etäisyys
c) Suomen maantiekartalla, jonka mittakaava on 1 : 200 000
d) Pohjois-Euroopan kartalla, jonka mittakaava on 1 : 4 500 000?

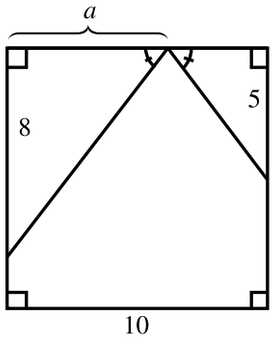
43. Joen leveys määritettiin kuvion mukaisten mittausten avulla. Kuinka leveä joki on?



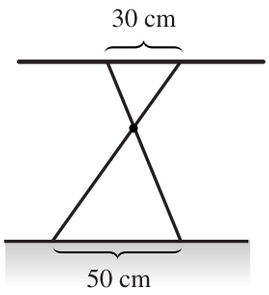
44. Janat BC ja DE ovat yhdensuuntaiset. Laske janan DE pituus.



45. Kuinka pitkä jana a on? (Koska tehtävän luvuilla ei ole yksikköjä, ne eivät ole mittalukuja vaan tarkkoja arvoja. Myös vastaus on annettava tarkkana arvona, ei likiarvona.)



46. Silityslaudan korkeus on 70 cm. Millä korkeudella silityslaudan jalkojen nivel on?



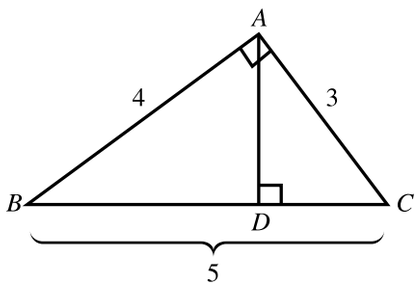
47. Kun metrin pituista tauluviivainta pidettiin vaakasuorassa kattolampun alapuolella 120 cm:n korkeudella lattiasta, viivaimesta lankesi lattiaan 140 cm:n pituinen varjo. Kuinka korkealla kattolamppu on?

48. Kolmion ABC sivun AB pituus on 3 ja kärjestä C piirretyn korkeusjanan pituus 4. Kolmion sisään on piirretty neliö, jonka yksi sivu on sivulla AB ja kaksi muuta kärkeä kolmion sivuilla CA ja CB. Kuinka pitkä neliön sivu on?

49. Taiteilija hahmottelee maalausta kankaalle, jonka leveys on 83 cm ja korkeus 51 cm. Hän haluaa rajata oikeasta reunasta kankaan korkuisen alueen, joka on yhdenmuotoinen koko kankaan kanssa. Kuinka leveä alueen tulee olla?

50. A4-paperiarkin muoto (kuten kaikkien A-sarjan arkkien A0, A1 jne. muoto) on valittu niin, että se täyttää seuraavan ehdon:
Jos A4-arkki puolitetaan keskeltä lyhyemmän sivun suuntaisesti, niin näin saatu A5-arkki on yhdenmuotoinen koko arkin kanssa.
a) A4-arkin lyhyemmän sivun pituus on 21,0 cm. Kuinka pitkä arkin pitempi sivu on?
b) A4-arkki pienennetään kopiokoneella A5-kokoon. Kuinka monta prosenttia arkille kirjoitetun tekstin kirjainten korkeus pienenee?

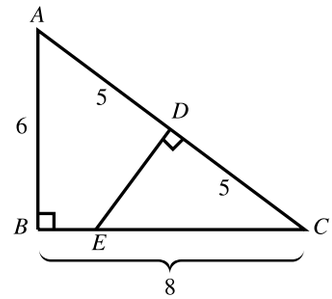
51. Kuviossa on suorakulmainen kolmio ABC, jolle on piirretty suoran kulman kärjestä korkeusjana AD.



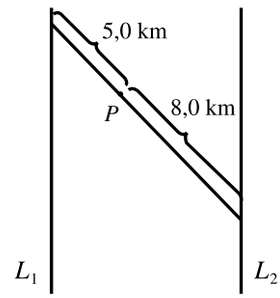
a) Perustele kolmioiden ABC ja DAC yhdenmuotoisuus.
Mikä on kolmion ABC pisteen b) A c) B vastinpiste kolmiossa DAC?
Mikä on janan d) BC e) AC vastinjana?
f) Kuinka pitkä korkeusjana AD on?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

52. Perustele kolmioiden ABC ja DEC yhdenmuotoisuus. Laske janan DE pituus.

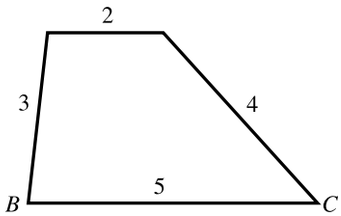


53. Yhdensuuntaisten teiden L_1 ja L_2 etäisyys on 8,0 km. Laske talon P etäisyys teistä L_1 ja L_2.



54. Katsoja näkee sähköpylvään huipun peilikuvan pienessä vesilammikossa. Katsojan silmät ovat 180 cm:n korkeudella, katsojan jalkojen etäisyys lammikosta on 1,2 m ja lammikon etäisyys pylväästä 5,0 m. Kuinka korkea pylväs on? Kun valonsäde heijastuu tasaisesta pinnasta, se jättää pinnan samassa kulmassa, jossa se kohtaa pinnan.

55. Kuvion puolisuunnikkaan erisuuntaisia sivuja jatketaan, kunnes jatkeet leikkaavat toisensa. Olkoon leikkauspiste A. Laske janojen AB ja AC pituudet.



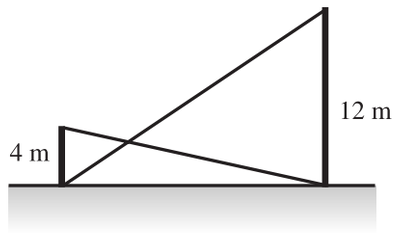
56. Kolmion ABC sivun AB pituus on 6 ja kärjestä C piirretyn korkeusjanan pituus 5. Kolmion sisään on piirretty suorakulmio, jonka yksi sivu, pituudeltaan 4, on kolmion sivulla AB ja vastakkaisen sivun päätepisteet sivuilla CA ja CB. Kuinka pitkät suorakulmion kaksi muuta sivua ovat?

57. a) Kolmiolle piirretään korkeusjanat kahdesta eri kärjestä. Osoita, että tällöin muodostuu kaksi keskenään yhdenmuotoista kolmiota.
b) Kolmion ABC kärjestä A piirretty korkeusjana jakaa sivun BC osiin, joiden pituudet kärjestä B lukien ovat 7 ja 3. Sivun AC pituus on 15. Kuinka pitkiin osiin kärjestä B piirretty korkeusjana jakaa sivun AC?
c) Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 6 ja kyljen pituus 9. Kuinka pitkiin osiin kolmion kannan päätepisteestä piirretty korkeusjana jakaa kolmion kyljen?

58. Vartiotornin korkeus on 15 metriä. 40 metrin etäisyydellä tornista on $3{,}0$ metriä korkea muuri. Voidaanko tornista havaita 170 cm:n pituinen henkilö, joka on muurin takana $4{,}0$ metrin etäisyydellä muurista?

59. Suorakulmion muotoisen paperiarkin sivut ovat 12 cm ja 40 cm. Arkki halutaan leikata lyhyemmän sivun suuntaisesti kahteen keskenään yhdenmuotoiseen osaan. Kuinka leikkaaminen on suoritettava?

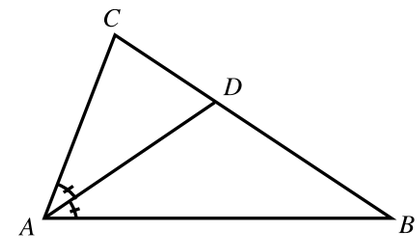
60. Kaksi pylvästä, joiden korkeudet ovat $4{,}0$ metriä ja 12 metriä ja etäisyys 24 metriä, on tuettu toisiinsa vaijereilla kuvion mukaisesti. Millä korkeudella vaijerit kohtaavat toisensa?



61. Kaksi pylvästä, joiden korkeudet ovat a ja b on tuettu toisiinsa vaijereilla edellisen tehtävän kuvion mukaisesti. Osoita, että korkeus, jolla vaijerit kohtaavat, riippuu ainoastaan pylväiden korkeuksista a ja b, ei pylväiden etäisyydestä.

62. Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla voidaan todistaa niin sanottu *kolmion kulmanpuolittajalause:* Kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun osiin, joiden suhde on yhtä suuri kuin kulman viereisen sivujen suhde. Kuvion merkinnöin:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$



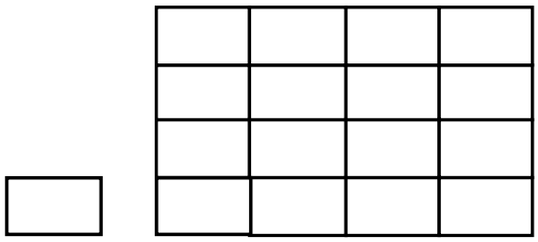
Todista kulmanpuolittajalause seuraavien ohjeiden avulla.
1° Piirrä kolmion ABC kärjistä B ja C normaalit (eli kohtisuorat) kulman A puolittajalle. Merkitse kirjaimella P pisteestä B piirretyn normaalin ja kulmanpuolittajan leikkauspistettä ja kirjaimella Q toisen normaalin ja puolittajan leikkauspistettä.
2° Osoita, että kolmiot BPD ja CQD samoin kuin kolmiot APB ja AQC ovat keskenään yhdenmuotoiset.
3° Osoita, että $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$.

63. Kolmion ABC sivujen pituudet ovat: $AB = 4$, $BC = 6$ ja $CA = 7$. Käytä hyväksi edellisessä tehtävässä todistettua kolmion kulmanpuolittajalausetta ja laske, kuinka pitkiin osiin kulman A puolittaja jakaa vastakkaisen sivun.

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde

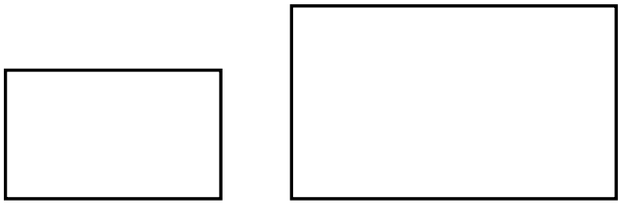
Ongelma

Suorakulmio suurennetaan niin, että sen sivut tulevat nelinkertaisiksi. Kuinka monta alkuperäistä suorakulmiota mahtuu suurennettuun suorakulmioon? Entä kuinka monta mahtuu, jos sivut tulevat suurennoksessa 15-kertaisiksi?



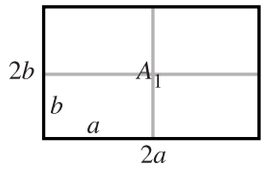
JOHDANTOESIMERKKI 1

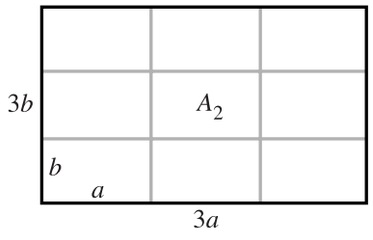
Suorakulmiot ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{2}{3}$. Mikä on suorakulmioiden pinta-alojen suhde?



Ratkaisu

Merkitään pienemmän suorakulmion sivuja $2a$ ja $2b$, jolloin suuremman suorakulmion sivut ovat $3a$ ja $3b$.





Suorakulmioiden pinta-alojen suhde on

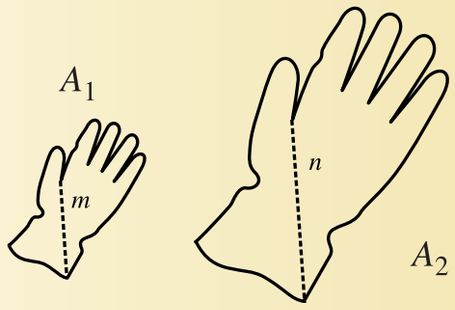
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\cancel{a}^{1} \cdot 2\cancel{b}^{1}}{3\cancel{a}_{1} \cdot 3\cancel{b}_{1}} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \quad \left(= \left(\frac{2}{3}\right)^2\right).$$

Vastaus $\frac{4}{9} \quad \left(= \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$

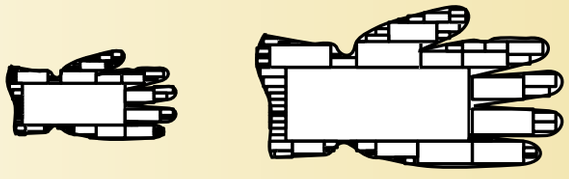
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alalause

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen (mittakaavan) neliö. Jos kuviot ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{m}{n}$, niin kuvioiden pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

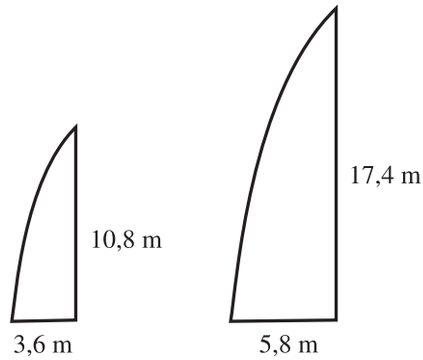


Lauseen todistus, jota tässä ei voida suorittaa täsmällisesti, perustuu siihen, että jokainen tasokuvio, jolla on pinta-ala, voidaan täyttää kuinka tarkasti tahansa suorakulmioilla.



ESIMERKKI 2

Kahdessa erikokoisessa purjeveneessä on yhdenmuotoiset isopurjeet. Kuinka monta prosenttia pienemmän purjeen pinta-ala on suuremmman purjeen pinta-alasta?



Ratkaisu

Purjeiden pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen neliö.

Yhdenmuotoisuussuhde on janan ja sen vastinjanan pituuksien suhde $\frac{3{,}6}{5{,}8}$ (tai yhtä suuri suhde $\frac{10{,}8}{17{,}4}$).

Siis pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{3{,}6}{5{,}8}\right)^2 \approx 0{,}39.$$

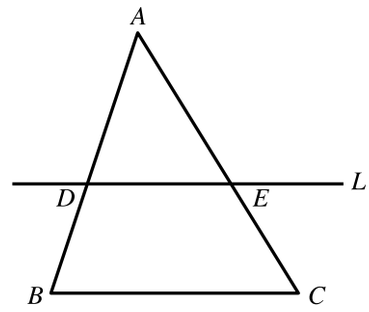
Suhde ilmaistaan prosentteina: $0{,}39 = 39\ \%$.

Vastaus

39 %

ESIMERKKI 3

Kolmion ABC sivun BC suuntainen suora L jakaa sivun AB kahteen osaan, joiden pituuksien suhde kärjestä A lukien on $4 : 3$. Mikä on suoran L erottaman kolmion ADE pinta-alan suhde kolmion ABC pinta-alaan?



Ratkaisu

Osoitetaan, että kolmio ADE on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa.

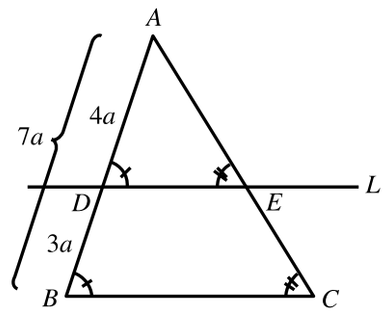
Koska suora L on yhdensuuntainen sivun BC kanssa, niin:

$\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABC$ (samankohtaiset kulmat)
$\sphericalangle AED = \sphericalangle ACB$ (samankohtaiset kulmat).

Siis kolmiot ADE ja ABC ovat yhdenmuotoiset (kk).

Kolmioiden ADE ja ABC pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen neliö. Määritetään yhdenmuotoisuussuhde.

Janan AD pituuden suhde janan DB pituuteen on $4 : 3$. Merkitään janan AD pituutta $4a$.* Tällöin janan DB pituus on $3a$, ja janan AB pituus on $3a + 4a = 7a$.



Kolmioiden ADE ja ABC yhdenmuotoisuussuhde on sivun AD ja sen vastinsivun AB pituuksien suhde $\dfrac{4\cancel{a}^{1}}{7\cancel{a}_{1}} = \dfrac{4}{7}$.

Kolmioiden ADE ja ABC pinta-alojen suhde on $\left(\dfrac{4}{7}\right)^2 = \dfrac{16}{49} \approx 0{,}33$.

Vastaus

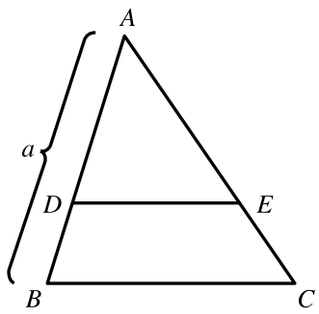
$\dfrac{16}{49} \approx 0{,}33$

---

* Jana AD ajatellaan jaetuksi neljään yhtä pitkään osaan ja jako-osan pituutta on merkitty a. Suhdelukua 4 ei voida käyttää janan AD pituutena, sillä janan pituutta ei tiedetä.

ESIMERKKI 4

Kolmion ABC sivun BC suuntainen jana DE jakaa kolmion kahteen osaan, joiden pinta-alat ovat yhtä suuret. Kuinka pitkä on jana AD, jos janan AB pituus on a?



Ratkaisu

Koska jana DE on yhdensuuntainen janan BC kanssa, kolmiot ADE ja ABC ovat yhdenmuotoiset (samankohtaiset kulmat, kk).

Merkitään janan AD pituutta x. Kolmioiden ADE ja ABC yhdenmuotoisuussuhde on $\frac{x}{a}$.

Kolmion ADE pinta-ala on puolet kolmion ABC pinta-alasta, eli kolmioiden pinta-alojen suhde on $\frac{1}{2}$. Pinta-alojen suhde on yhtä suuri kuin yhdenmuotoisuussuhteen $\frac{x}{a}$ neliö.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Vasemmalla puolella on yhdenmuotoisuussuhteen neliö ja oikealla puolella pinta-alojen suhde.

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2} \qquad | \cdot a^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}a \text{ tai } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}a$$

Sivun pituus ei voi olla negatiivinen.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}a \approx 0{,}71a$$

Vastaus

$\frac{1}{\sqrt{2}}a \quad (\approx 0{,}71a)$

TEHTÄVIÄ

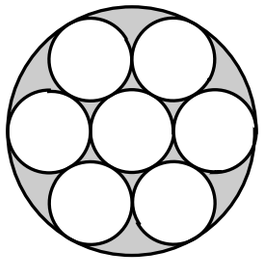
SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

64. Kuinka moninkertaiseksi kuvion pinta-ala tulee, kun kuvio suurennetaan mitoiltaan
a) viisinkertaiseksi b) 12-kertaiseksi?

65. Kuinka moninkertaisiksi kuvion mitat tulee suurentaa, jotta pinta-ala kasvaisi
a) yhdeksänkertaiseksi
b) kaksinkertaiseksi?

66. Kaikki Suomen liput ovat keskenään yhdenmuotoiset. Kahden lipun korkeudet ovat 1,45 m ja 2,35 m. Kuinka monta prosenttia pienemmän lipun pinta-ala on suuremman lipun pinta-alasta?

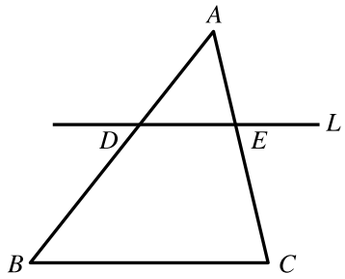
67. Mikä on pikkuympyröiden yhteenlasketun pinta-alan suhde ison ympyrän pinta-alaan? Huomaa, että ympyrän pinta-alan kaavaa ei tarvita.



68. a) Kartan mittakaava on 1 : 50 000. Luonnonsuojelualueen pinta-ala kartalla on 3,1 cm^2. Mikä on luonnonsuojelualueen pinta-ala? Anna vastaus hehtaareina. (Pinta-alan yksiköt ovat kirjan lopussa sivulla 227.)

b) Mikropiirin pinta-ala on 2,3 mm^2. Mikä on mikropiirin pinta-ala työpiirustuksessa, jonka mittakaava on 50 : 1?

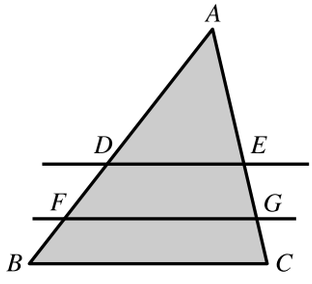
69. Kolmion ABC sivun BC suuntainen suora L jakaa sivun AC kahteen osaan, joiden pituuksien suhde kärjestä A lukien on 2 : 3. Mikä on suoran L erottaman kolmion ADE pinta-alan suhde kolmion ABC pinta-alaan?



70. Kahden keskenään yhdenmuotoisen nelikulmion pinta-alat ovat 75 cm^2 ja 300 cm^2. Pienemmän nelikulmion erään sivun pituus on 25 cm. Kuinka pitkä on sivun vastinsivu suuremmassa nelikulmiossa?

71. Kolmion ABC sivun BC suuntainen suora leikkaa sivun AB pisteessä D ja sivun AC pisteessä E. Janan AB pituus on a. Kuinka pitkä on jana AD, jos kolmion ADE pinta-ala on
a) neljäsosa b) kolmasosa
kolmion ABC pinta-alasta?

72. Kolmion muotoinen metsäpalsta ABC on jaettava kolmeen yhtä suureen osaan kahdella sivun BC suuntaisella linjalla. Sivun AB pituus on 830 m. Määritä linjojen aloituskohtien D ja F etäisyydet palstan kärjestä A.

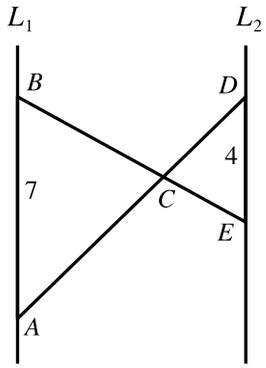


SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

73. Vastaa käyttämättä ympyrän alan kaavaa: Mikä on kahden ympyrän pinta-alojen suhde, jos ympyröiden halkaisijoiden suhde on

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{3}$?

74. Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset. Laske kolmion CDE pinta-alan suhde kolmion ABC pinta-alaan.



75. Kuinka moninkertaisiksi kuvion mitat tulee
a) suurentaa, jotta kuvion pinta-ala tulisi kolminkertaiseksi
b) pienentää, jotta kuvion pinta-ala pienenisi puoleen?

76. Neulepuvun ohjeet on laadittu 170 cm pitkän naisen puvulle. Mittasuhteita pienentäen neulotaan samanmallinen puku 152 cm pitkälle tytölle. Kuinka monta prosenttia tarvittavan lankamäärän paino on ohjeissa ilmoitetusta?

77. Rakennuksessa on kaksi yhdenmuotoista kaari-ikkunaa, joiden korkeudet ovat 1,4 m ja 2,1 m. Kuinka monta prosenttia vähemmän lasia tarvitaan pienempään ikkunaan?

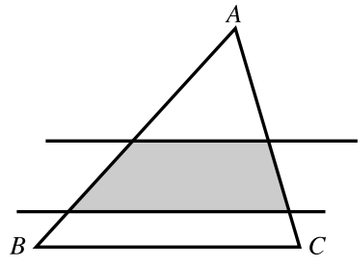
78. a) Tontin pinta-ala mittakaavassa 1 : 2 000 piirretyssä asemakaavakartassa on 4,7 cm^2. Mikä on tontin pinta-ala? Anna vastaus aareina.
b) Suomen pinta-ala on 337 000 km^2. Mikä on Suomen pinta-ala maantiekartalla, jonka mittakaava on 1 : 200 000?

79. Kolmion pinta-ala on 45 dm^2. Kolmion yhden sivun suuntainen suora jakaa leikkaamansa sivut vastakkaisesta kärjestä lukien suhteessa 2 : 1. Suora erottaa kolmiosta puolisuunnikkaan. Kuinka suuri puolisuunnikkaan pinta-ala on?

80. Purjeen pinta-ala on 18 m^2 ja korkeus 8,0 m. Kuinka korkea on sen kanssa yhdenmuotoinen purje, jonka pinta-ala on 25 m^2?

81. Kolmion muotoisen metsäpalstan ABC pinta-ala on 186 hehtaaria. Perinnönjaon yhteydessä palsta päätetään jakaa kahdella sivun BC suuntaisella linjalla kolmeen osaan niin, että kolmion muotoisen osan pinta-ala on 56 hehtaaria ja linjojen väliin jäävän puolisuunnikkaan muotoisen osan pinta-ala on 75 hehtaaria. Määritä linjojen aloituspaikat palstan sivulla AB, jonka pituus on 1,36 km.

82. Kolmio ABC on jaettu kahdella sivun BC suuntaiselle suoralla kolmeen osaan. Suorat jakavat sivun AB kärjestä A lukien suhteessa 3 : 2 : 1. Tummennetun alueen pinta-ala on 32. Kuinka suuri kolmion ABC pinta-ala on?



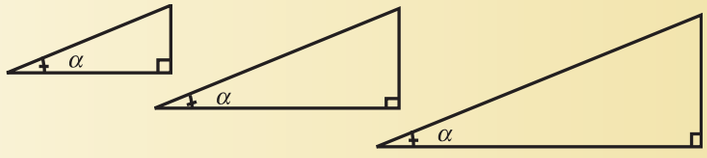
Suorakulmaisen kolmion trigonometria

Ongelma

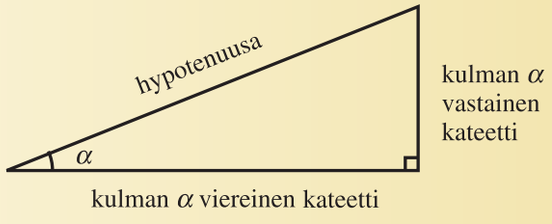
Kun aurinko paistoi 35°:n korkeudella, puusta lankesi tasaiselle vaakasuoralle pihalle varjo, joka metrin tarkkuudella mitattuna ulottui 30 metrin päähän puusta. Piirrä mallikolmio, jossa 35°:n kulma on oikean kokoinen ja varjoa vastaavan sivun pituus on 10 cm. Mittaa puuta vastaavan sivun pituus ja laske puun pituus. Auringon korkeuskulma on kulma, jonka suunta kohti aurinkoa muodostaa maanpinnan vaakatason kanssa.

Trigonometriset suhteet

Kaikki suorakulmaiset kolmiot, joissa on yhtä suuri terävä kulma α, ovat keskenään yhdenmuotoiset (kk).



Kaikissa niissä ovat siten vastaavissa asemissa olevien sivujen pituuksien suhteet yhtä suuret. Esimerkiksi kaikissa suorakulmaisissa kolmiossa, joissa on yhtä suuri terävä kulma α, on hypotenuusan pituuden suhde kulman α viereisen kateetin pituuteen yhtä suuri.



Jokaisella mahdollisella suorakulmaisen kolmion sivujen suhteella, niin sanotulla *trigonometrisella suhteella*, on oma latinalaisperäinen nimensä. Yleisimmin käytetään seuraavaa kolmea suhdetta.*

---

* Seuraavassa nimetyn tangentin, sinin ja kosinin lisäksi kulman α viereisen kateetin suhde vastaiseen kateettiin on kulman α kotangentti, hypotenuusan suhde viereiseen kateettiin on kulman α sekantti, ja hypotenuusan suhde vastaiseen kateettiin on kulman α kosekantti. Kreikasta juontuva sana trigonometria tarkoittaa kolmionmittausta, *tri* = kolme, *gonia* = kulma ja *metron* = mitta.

Terävän kulman tangentti, sini ja kosini

Olkoon α terävä kulma. Suorakulmaisessa kolmiossa, jossa on α:n suuruinen terävä kulma,

- suhde $\dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}$ on kulman α *tangentti*.

- suhde $\dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$ on kulman α *sini*.

- suhde $\dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$ on kulman α *kosini*.

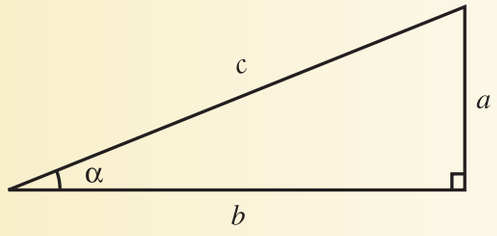
Kulman α tangenttia, siniä ja kosinia merkitään $\tan\alpha$, $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$.

Viereisessä kolmiossa:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$



Kulman tangenttia, siniä ja kosinia voidaan monin tavoin käyttää kuvion osien ratkaisemiseen. Myöhemmin tässä kursissa määritellään myös tylpän kulman sini ja kosini. Kurssissa Trigonometriset funktiot ja lukujonot tangentin, sinin ja kosinin määritelmät yleistetään kaikensuuruisille kulmille.*

---

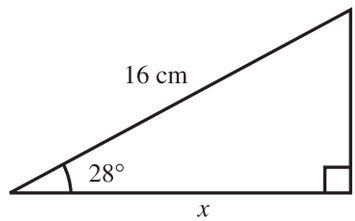
* Sana tangentti tulee latinan sanasta *tangens*, koskettava. Nimityksen alkuperä tulee ymmärrettäväksi kurssissa Trigonometriset funktiot ja lukujonot.
Sana sini tulee latinan sanasta *sinus*, joka tarkoittaa lahtea, poimua. Nimityksen takana on käännösvirhe. Siniä käytettiin ensimmäisen kerran Intiassa 400-luvulla. Suhteen sanskriitinkielinen nimitys oli *jiva* (jänne), josta muotoutui arabiankielinen nimitys *jiba*. Latinankielisissä käännöksissä 1200-luvulla tämä sekaantui arabian sanaan *jaib* (lahti), koska arabiassa sanat kirjoitetaan samalla tavalla.
Sana kosini tulee latinan sanasta *cosinus*, joka on lyhenne sanoista *complementi sinus*, komplementin sini. Nimitys johtuu siitä, että kulman α kosini on yhtä suuri kuin suorakulmaisen kolmion toisen terävän kulman $90° - \alpha$ sini. Kulma $90° - \alpha$ on kulman α ns. komplementtikulma.

ESIMERKKI 1

Suorakulmaisen kolmion toisen terävän kulman suuruus on $28°$ ja hypotenuusan pituus 16 cm. Laske kolmion pitemmän kateetin pituus.

Ratkaisu

Piirretään mallikuvaksi suorakulmainen kolmio, jonka toinen terävä kulma on $28°$.* Koska $28°$:n kulma on kolmion terävistä kulmista pienempi, kolmion pitempi kateetti on $28°$:n kulman viereinen kateetti.



$$\cos 28° = \frac{x}{16} \qquad \big| \cdot 16$$

Yhtälöstä ratkaistaan x.

$$x = 16 \cdot \cos 28° \approx 14 \text{ (cm)}$$

Laskimella.**

Vastaus

14 cm

---

* Mallikuva kannattaa piirtää oikean muotoiseksi. Kuviosta voi silloin tehdä ratkaisun kannalta tarpeellisia päätelmiä esimerkiksi sivujen ja kulmien suuruusjärjestyksestä ja tuloksen voi likimääräisesti tarkistaa kuviosta mittaamalla.

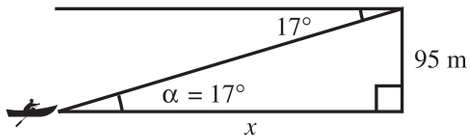
** Laskimesta riippuen näppäillään 16 [×] [cos] 28 [=] tai 16 [×] 28 [cos] [=]. Laskimessa tulee olla kulman yksikön asetuksena aste (Degree, Deg tai D).

ESIMERKKI 2

Pystysuoran rantakallion reunalta 95 metrin korkeudesta tarkkaillaan lähestyvää venettä. Vene näkyy 17° silmäntason alapuolella. Kuinka kaukana vene on rannasta?

Ratkaisu

Katsojan ja veneen kautta kulkeva suora muodostaa 17°:n kulman katsojan kautta kulkevan vaakatason kanssa. Kulma α on 17°:n kulman kanssa samankohtainen kulma, joten myös $\alpha = 17°$.



Kulman α vastaisen kateetin pituus on 95 m. Kysytty etäisyys x on viereisen kateetin pituus.

$$\tan 17° = \frac{95}{x} \qquad \big| \cdot x$$

Voidaan myös kertoa ristiin kirjoittamalla yhtälö ensin muotoon $\frac{\tan 17°}{1} = \frac{95}{x}$.

$$x \cdot \tan 17° = 95 \qquad \big| : \tan 17°$$

$$x = \frac{95}{\tan 17°} \approx 310 \text{ (m)}$$

Vastaus

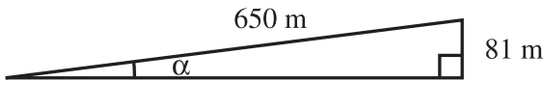
310 m

ESIMERKKI 3

Tasaisesti viettävän 650 metriä pitkän laskettelurinteen alun ja lopun korkeusero on 81 metriä. Mikä on rinteen kaltevuuskulma?

Ratkaisu

Kolmiosta voidaan määrittää kaltevuuskulman α sini.



$$\sin\alpha = \frac{81}{650} \quad (\approx 0{,}125)$$

$$\alpha \approx 7{,}2°$$

Kulman α suuruus saadaan laskimen näppäimellä $\boxed{\sin^{-1}}$.*

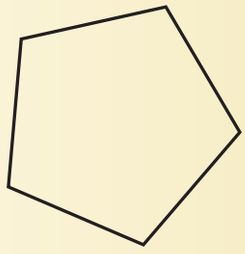
Vastaus

7,2°

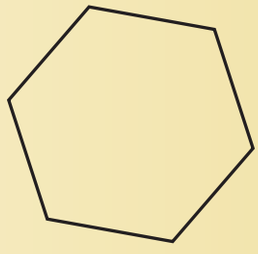
Seuraavassa esimerkissä tutkitaan trigonometrian avulla säännöllistä monikulmiota.

Säännöllinen monikulmio

Säännöllinen monikulmio on monikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat yhtä suuret.



säännöllinen viisikulmio



säännöllinen kuusikulmio

---

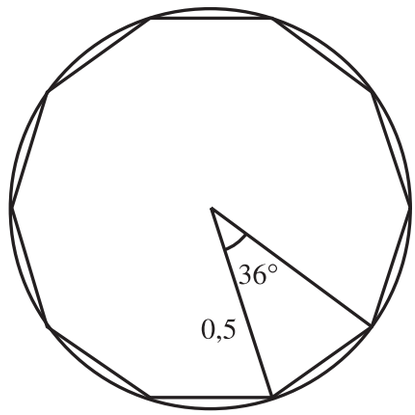
* Näppäimeen $\boxed{\sin^{-1}}$ päästään laskimesta riippuen näppäilyllä $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\sin}$ tai $\boxed{\text{inv}}$ $\boxed{\sin}$ tai $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\sin}$. Näppäintä $\boxed{\sin^{-1}}$ käytetään siis silloin, kun tiedetään kulman sini ja halutaan tietää kulman suuruus.

ESIMERKKI 4

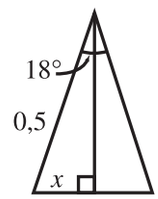
Ympyrän halkaisijan pituus on 1. Laske ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kymmenkulmion piiri kahden desimaalin tarkkuudella.
Sanonta *ympyrän sisään piirretty* monikulmio tarkoittaa monikulmiota, jonka kaikki kärjet ovat ympyrän kehällä.

Ratkaisu

Säännöllisellä monikulmiolla ja ympyrällä, joka kulkee monikulmion kaikkien kärkien kautta, on yhteinen keskipiste. Keskipisteestä kymmenkulmion vierekkäisiin kärkiin piirretyt säteet muodostavat ympyrän keskuskulman*, jonka suuruus on $360° : 10 = 36°$.



Muodostuvasta tasakylkisestä kolmiosta voidaan ratkaista kymmenkulmion sivun puolikas x.



$$\sin 18° = \frac{x}{0{,}5} \qquad | \cdot 0{,}5$$

$$x = 0{,}5 \cdot \sin 18°$$

Kymmenkulmion sivun pituus on

$$2x = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \sin 18° = \sin 18°$$

ja piiri

$$p = 10 \cdot \sin 18° \approx 3{,}09.$$

Vastaus

3,09

---

* Perusasteella opittuja ympyrän osien nimityksiä on kerrattu sivulla 222 olevassa sanastossa.

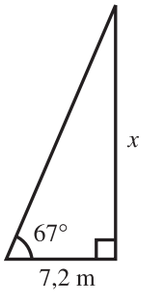
TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

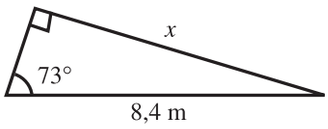
83. a) Piirrä suorakulmainen kolmio, jossa on 50°:n terävä kulma ja jonka hypotenuusan pituus on 10 cm, mittaa kolmion kateetit ja määritä likimääräisesti $\sin 50°$, $\cos 50°$ ja $\tan 50°$.
b) Piirrä suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 10 cm ja 4 cm, ja määritä mittaamalla likimääräisesti kulma α, jolle pätee $\tan \alpha = 0{,}4$.

84. Laske sivun pituus x.

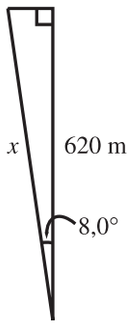
a)



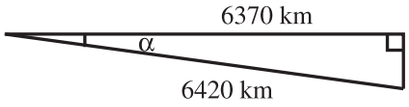
b)



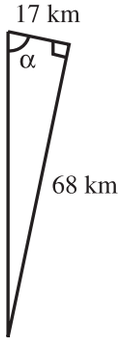
c)



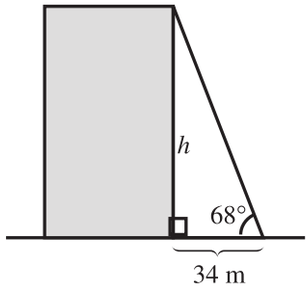
85. Kuinka suuri kulma α on?
a)



b)



86. Määritä rakennuksen korkeus h kuvioon merkittyjen mittausten perusteella.



87. Luodolla olevasta majakasta 51 metrin korkeudelta vedenpinnasta näkyy suoraan etelässä hylje ja vene. Hylje näkyy 12° ja vene 4,5° vaakatason alapuolella. Kuinka etäällä hylje on veneestä?

88. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 7,21 cm ja huippukulma 132°. Laske kolmion pinta-ala.

89. Jalkapallomaalin leveys on 7,32 metriä (8 jaardia). Rangaistuspotkun suorituspaikka (ns. pilkku) on maalin keskikohdan kohdalla 11,0 metrin etäisyydellä maalista. Kuinka suuressa kulmassa maalitolppien väli näkyy pilkulta?

90. Kaukoputken näkökulman suuruus on 7,0°. Millä etäisyydellä on poikkisuuntaan kulkeva 178 m pitkä laiva, jonka pituus ohitushetkellä laivan ollessa lähinnä katsojaa juuri täyttää kiikarin näkökentän?

91. Ympyrän säde on 8,5 cm.
a) Ympyrään piirretään 72°:n suuruinen keskuskulma. Kuinka pitkä keskuskulman kylkien ja ympyrän leikkauspisteitä yhdistävä jänne on?
b) Ympyrälle piirretään 5,0 cm:n pituinen jänne. Kuinka suuren koveran keskuskulman jänteen päätepisteisiin piirretyt säteet muodostavat?

92. Ympyrän halkaisijan pituus on 1. Laske ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 20-kulmion piiri kahden desimaalin tarkkuudella.

93. Riisipelto viettää joen rantaan 1,6°:n kaltevuuskulmassa. Kuinka pitkälle vesi nousee pellolle, kun rankkasateet nostavat joen vedenpintaa 7,4 m?

94. Yläkerran ikkunasta 5,5 metrin korkeudesta näkyy tasaisella pihalla kasvavan puun silmäntason alapuolinen osa 12°:n kulmassa ja silmäntason yläpuolinen osa 23°:n kulmassa. Kuinka pitkä puu on?

95. Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella kulma, jossa pisteitä $(1, 3)$ ja $(1, -1)$ yhdistävä jana näkyy pisteestä $(6, -2)$.

96. Muiden tähtien etäisyyksiä Auringosta pystyttiin laskemaan 1800-luvulla, kun mittalaitteiden kehitys mahdollisti läheisimpien tähtien tarkan *parallaksin* määrittämisen. Tähden parallaksi on puolet sen kulman suuruudesta, jossa Maan kiertoradan halkaisija näkyy tähdestä.
a) Ensimmäinen tähti, jonka etäisyys määritettiin, on Joutsenen tähtikuviossa oleva 61 Cygni, jonka parallaksi on 0,294″. Kuinka monen valovuoden päässä 61 Cygni on? Maan kiertoradan keskisäde on $0{,}1496 \cdot 10^{12}$ m. Valovuosi on $9{,}46 \cdot 10^{15}$ m.
b) Tähtitieteellisissä esityksissä käytetään etäisyyden yksikköä parsek (parallaksisekunti), lyhennettynä pc. Kohteen etäisyys on yksi parsek, jos sen parallaksi on yksi sekunti. Kuinka monta metriä ja kuinka monta valovuotta yksi parsek on?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

97. Taulukossa on auringon korkeuskulma Keski-Suomessa heinäkuun 4. päivänä eri kellonaikoina.

kellonaika	8	10	12	14	16	18	20
korkeuskulma	24°	38°	48°	50°	43°	30°	16°

a) Kuinka pitkä on 173 cm pitkän henkilön varjo Keski-Suomessa heinäkuun 4. päivänä kello 14?
b) Mikä on likimääräinen kellonaika heinäkuun 4. päivänä, kun Saarijärvellä hiekkarannalle pystytetystä metrin pituisesta kepistä lankeaa 1,7 metrin pituinen varjo?

98. Suorakulmaisen kolmion lyhyemmän kateetin pituus on 8,6 cm ja toisen terävän kulman suuruus 17°. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

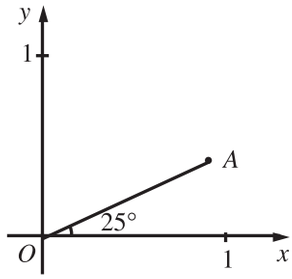
99. Säännöllisen viisikulmion sivujen pituus on 8,0 cm. Kuinka suuri viisikulmion pinta-ala on?

100. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 17 cm ja kannan pituus 11 cm. Kuinka suuret kolmion kulmat ovat?

101. Tasaisesti viettävän rannan kaltevuuskulma on 2,2°. Kuinka paljon vesiraja etääntyy laskuveden aikana, jos nousu- ja laskuveden välinen vedenpinnan korkeusero on 4,8 m?

102. Valokuvaaja haluaa kuvata 180 cm leveän taulun. Kuinka etäällä taulusta hänen tulee vähintään seistä, jos hän käyttää
a) laajakulmaobjektiivia, jonka näkökulma on 64°
b) normaaliobjektiivia, jonka näkökulma on puolet edellisestä eli 32°?

103. Origosta alkavan janan OA pituus on 1. Määritä toisen päätepisteen A koordinaatit neljän desimaalin tarkkuudella.



104. Suorakulmion sivut ovat a ja $3a$. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) suorakulmion lävistäjän ja suorakulmion sivujen välisten kulmien suuruudet
b) suorakulmion lävistäjien välisen terävän kulman suuruus.

105. Tasakattoisen talon räystäs on 3,4 metrin korkeudella maasta. Ikkunan alareuna on 1,3 metrin korkeudella. Kuinka pitkälle seinästä räystään tulee ulottua, jotta se suojaisi koko ikkunan auringonvalolta kesäpäivän kuumimpina hetkinä, jolloin aurinko paistaa yli 54°:n korkeudella?

106. Paikasta A purjehdittiin paikkaan B purjehtimalla ensin 3,5 kilometriä etelään, sitten 7,0 kilometriä länteen ja vielä 8,5 kilometriä etelään. Paluumatka halutaan purjehtia suoraan. Laske kompassisuunta paikasta B paikkaan A. Kompassisuunta ilmaistaan asteina pohjoisesta myötäpäivään lukien.

107. Itä-länsi suuntaisella katon harjalla on pystysuora antenni. Kun aurinko eräänä kesäpäivänä oli etelässä 52°:n korkeudella, antennista lankesi katon lappeelle 4,9 metrin pituinen varjo. Katon lappeen kaltevuuskulma on 21°. Kuinka korkea antenni on?

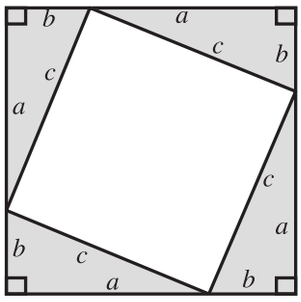
108. Puu kasvaa etelään tasaisesti viettävällä rinteellä, jonka kaltevuuskulma on 12°. Kun aurinko paistoi suoraan etelässä 32°:n korkeudella, puusta lankesi ylärinteeseen 16 m pitkä varjo. Kuinka korkea puu on?

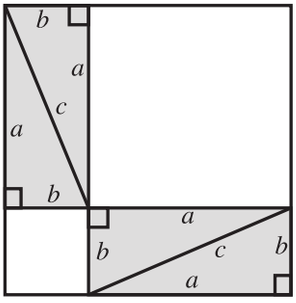
109. Ympyrän halkaisijan pituus on 1. Muodosta lauseke ympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion piirille. Laske lausekkeen avulla kuuden desimaalin tarkkuudella ympyrän sisään piirretyn säännöllisen a) 100-kulmion
b) 10 000-kulmion piiri.

Pythagoraan lause

Ongelma

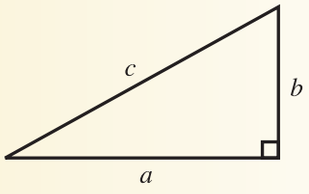
Neljä samanlaista suorakulmaista kolmiota on sijoitettu kahdella eri tavalla neliöön, jonka sivun pituus on kateettien pituuksien summa $a + b$. Laske molemmista kuvioista peittämättä jäävän alueen pinta-ala.





Pythagoraan lause

Suorakulmaisessa kolmiossa kateettien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan pituuden neliö.

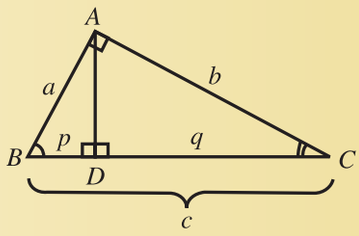


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pythagoraan lauseelle on esitetty lukuisia todistuksia, erään arvion mukaan 370 erilaista. Yksi todistus on edellä ongelmana. Seuraava todistus perustuu yhdenmuotoisiin kolmioihin.

Pythagoraan lauseen todistus

Suorakulmaisen kolmion ABC suoran kulman kärjestä piirretään hypotenuusalle korkeusjana AD. Tällöin muodostuu kaksi pienempää suorakulmaista kolmiota, kolmiot DBA ja DAC.



Osoitetaan, että molemmat kolmiot DBA ja DAC ovat yhdenmuotoisia kolmion ABC kanssa.

Kolmioissa DBA ja ABC on kummassakin suorakulma ja kolmioilla on yhteinen kulma B. Samoin kolmioissa DAC ja ABC on kummassakin suorakulma ja kolmioilla on yhteinen kulma C.

Siis kolmiot DBA ja DAC ovat yhdenmuotoisia kolmion ABC kanssa (kk).

Muodostetaan yhdenmuotoisissa kolmioissa DBA ja ABC lyhyemmän kateetin suhde hypotenuusaan. Suhteet ovat yhtä suuret.

$$\frac{p}{a} = \frac{a}{c}$$ Kerrotaan ristiin.

$$a^2 = pc$$

Muodostetaan yhdenmuotoisissa kolmioissa DAC ja ABC pitemmän kateetin suhde hypotenuusaan. Suhteet ovat yhtä suuret.

$$\frac{q}{b} = \frac{b}{c}$$ Kerrotaan ristiin.

$$b^2 = qc$$

Yhdistetään edelliset.

$$a^2 + b^2 = pc + qc$$

$$a^2 + b^2 = (p + q)c \qquad p + q = c$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pythagoraan lause on todistettu. □

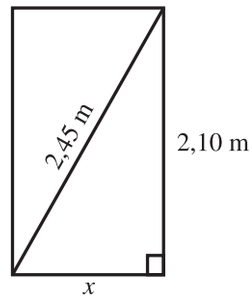
ESIMERKKI 1

Kuinka leveä 2,10 metriä korkean oven pitäisi olla, jotta 4,26 metriä pitkä ja 2,45 metriä leveä lasilevy mahtuisi ovesta?

Ratkaisu

Kapeimman mahdollisen oviaukon lävistäjä on levyn lyhyemmän sivun pituinen.

Hypotenuusa on 2,45 m ja toinen kateetti 2,10 m. Toinen kateetti ratkaistaan Pythagoraan lauseen avulla.



$x^2 + 2{,}1^2 = 2{,}45^2$ Ratkaistaan ensin x^2.

$x^2 = 2{,}45^2 - 2{,}1^2$

$x = (\pm)\sqrt{2{,}45^2 - 2{,}1^2}$ Leveys ei voi olla negatiivinen.

$x \approx 1{,}26$ (m)

Oven leveyden tulee olla yli 1,26 m.

Vastaus

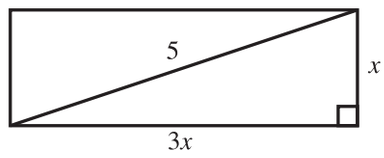
yli 1,26 m leveä

ESIMERKKI 2

Suorakulmion pitempi sivu on kolme kertaa niin pitkä kuin lyhyempi sivu. Suorakulmion lävistäjän pituus on 5. Laske sivujen pituuksien tarkat arvot.

Ratkaisu

Merkitään sivuja x ja $3x$. Pythagoraan lauseella saadaan yhtälö.



$x^2 + (3x)^2 = 5^2$ Tulon potenssin kaava $(ab)^n = a^n b^n$.

$x^2 + 3^2x^2 = 5^2$

$x^2 + 9x^2 = 25$

$10x^2 = 25$ $\quad | : 10$

$x^2 = \frac{25}{10}$

$x^2 = \frac{5}{2}$

$x = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{5}{2}}$ Pituus ei voi olla negatiivinen.

Sivujen pituudet ovat $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ja $3\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Vastaus

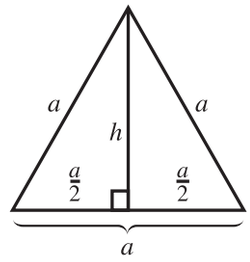
$\sqrt{\frac{5}{2}}$ ja $3\sqrt{\frac{5}{2}}$

ESIMERKKI 3

Ilmaise tasasivuisen kolmion pinta-ala sivun pituuden a lausekkeena.

Ratkaisu

Määritetään ensin tasasivuisen kolmion korkeus h kolmion puolikkaasta.



$$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2$$

$$h^2 + \frac{1}{4}a^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

Oikean puolen termit yhdistetään käyttämällä osittelulakia $ac + bc = (a + b)c$.

$$h^2 = (1 - \frac{1}{4})a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = (\pm)\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}}\,a = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$$

Pinta-ala on puolet sivun ja sivulle piirretyn korkeusjanan tulosta.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,a = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$$

Vastaus

$\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

110. Liisan huoneen ikkunan alareuna on 3,6 metrin korkeudella. Seinän edessä on 2,3 metriä leveä istutus, johon ei saa jättää jälkiä. Kuinka pitkät tikapuut tarvitaan, jotta ne ulottuisivat ikkunaan?

111. 5,5 metrin pituiset tikapuut asetettiin puun runkoa vasten niin, että ne juuri ylettyivät alimpiin oksiin. Tikkaiden alapää oli tällöin 2,5 metrin päässä rungosta. Kuinka korkealla puun alimmat oksat ovat?

112. Voidaanko 2,30 metriä pitkä ja 1,15 metriä leveä sänky siirtää hotellihuoneen 2,55 metrin pituiselta päätyseinältä huoneen pitemmälle sivuseinälle lattiaa pitkin sängyn pyörien varassa?

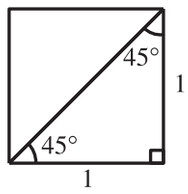
113. Suorakulmion muotoisen kentän pitemmän sivun pituuden suhde lyhyemmän sivun pituuteen on 3 : 2. Lävistäjää pitkin kulkevan polun pituus on 52 m. Kuinka pitkät kentän sivut ovat?

114. Laske tasakylkisen kolmion pinta-ala, kun
a) kolmion kylki on 7,1 cm ja kanta 8,4 cm
b) kolmion kylki on $3a$ ja kanta $4a$.

115. Raskaita taakkoja vedetään virran yli pitkin vaakasuoraksi pingotettua 120 metriä pitkää vaijeria. Taakan paino venyttää vaijeria, jolloin taakka laskeutuu lähemmäs vedenpintaa, alimmilleen vaijerin keskikohdassa. Jotta taakka ei koskettaisi veteen, vaijerin keskikohta saa laskeutua korkeintaan 2,0 m. Kuinka paljon vaijeri saa enintään venyä?

116. Laske
a) pisteen $A(-2, 5)$ etäisyys origosta
b) pisteitä $A(-2, 5)$ ja $B(3, -1)$ yhdistävän janan AB pituus.

117. Joitakin usein toistuvia geometrian laskuja voi lyhentää käyttämällä niin sanottuja *muistikolmioita*. Yksi muistikolmio on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituus on 1, eli puolikas neliöstä, jonka sivun pituus on 1.



a) Laske muistikolmion hypotenuusan pituus (neliön lävistäjä). Mikä on hypotenuusan pituuden suhde kateetin pituuteen?
Kaikki neliöt ja kaikki tasakylkiset suorakulmaiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia, joten niissä voidaan käyttää hyväksi a-kohdassa laskettua suhdetta. Käytä suhdetta hyväksesi seuraavissa kohdissa b – e.
b) Neliön sivun pituus on 2,9 m. Kuinka pitkä neliön lävistäjä on?
c) Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion kateettien pituus on 3. Kuinka pitkä kolmion hypotenuusa on?
d) Neliön lävistäjän pituus on a. Kuinka pitkä neliön sivu on?
e) Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 7,3 m. Kuinka pitkiä kolmion kateetit ovat?

118. Suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 13 ja suoran kulman kärjestä hypotenuusalle piirretyn korkeusjanan pituus 5. Laske toisen kateetin ja hypotenuusan pituus.

119. Rinne viettää tasaisesti 12°:n kulmassa. Myrsky taittoi rinteessä kasvavan puun 5,0 metrin korkeudelta, ja latvaosa kaatui alarinteeseen irtoamatta tyviosasta. Latva osui maahan 8,0 metrin päässä tyvestä. Laske puun korkeus.

120. Ohut rima, jonka pituus on 1,50 m katkaistaan suorakulmaisen kolmion kateeteiksi. Hypotenuusan pituudeksi halutaan 1,10 m. Kuinka pitkiin osiin rima on katkaistava?

SARJA II. PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

121. Tasamaalle pystytettyjen antennien korkeudet ovat 65 m ja 47 m. Antennien etäisyys toisistaan on 24 m. Mikä on antennien huippujen välinen etäisyys?

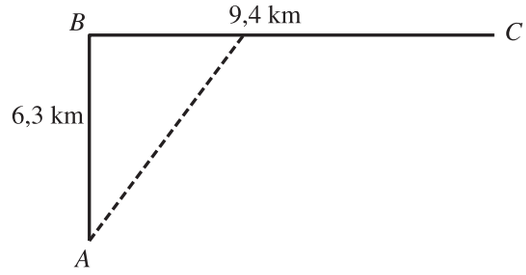
122. Kun lattialistan toinen pää oli nurkassa, toinen pää jäi vastapäiselle seinälle 75 senttimetrin päähän nurkasta. Listan pituus on 4,37 metriä. Kuinka paljon listaa pitää vielä lyhentää?

123. Ilman lämmetessä lämpölaajeneminen pidentää ratakiskoa. Ennen kiskojen väliin jätettiin laajenemisvara, joka aiheutti junan kulkiessa kuuluvan kiskojen kolkkeen. Nykyisin kiskot hitsataan kiinni toisiinsa ja kiinnitetään tukevammin ratapölkkyihin. Oletetaan, että lämpölaajeneminen pidentää 60,0 metrin mittaista kahdesta yhtä pitkästä pätkästä muodostuva kisko-osuutta 2,0 cm ja että tällöin keskellä olevat kiinnikkeet irtoavat ja hitsaussauma antaa periksi. Kuinka korkealle keskikohta nousee?

124. Tasakylkisen kolmion kyljen pituuden suhde kannan pituuteen on 17 : 16. Määritä kolmion kantakulman a) sinin b) tangentin tarkka arvo.

125. a) Suorakulmion lävistäjän pituus on a ja sivujen pituuksien suhde 5 : 3. Laske sivujen pituudet.
b) Neliön lävistäjän pituus on a. Määritä neliön piiri ja pinta-ala.

126. Oikotie paikasta A paikkaan C rakennetaan maantien BC kohtaan, joka on yhtä etäällä A:sta ja C:stä. Määritä tämä kohta tiellä BC.



127. Aamupäivällä oli taivallettu länteen ja iltapäivällä 3,0 kilometriä pitempi matka pohjoiseen. Leiriydyttäessä oltiin päädytty 12,5 kilometrin etäisyydelle lähtöpaikasta. Kuinka pitkä matka oli taivallettu?

128. Kun säännöllisen kuusikulmion kärjet yhdistetään kuusikulmion keskipisteeseen, muodostuu kuusi yhtenevää tasakylkistä kolmiota.
a) Minkä tyyppisiä nämä kolmiot ovat?
b) Kuinka suuri on säännöllisen kuusikulmion pinta-ala, jos sivujen pituus on a?
c) Kuinka pitkä on säännöllisen kuusikulmion sivu, jos kuusikulmion pinta-ala on 48 cm^2?

129. Neliön muotoisen paperin sivun pituus on 12 cm. Paperista halutaan tehdä säännöllinen kahdeksankulmio leikkaamalla jokaisesta kulmasta samanlainen kolmio. Millainen kolmio nurkista tulee leikata?

130. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 15 ja suoran kulman kärjestä hypotenuusalle piirretyn korkeusjanan pituus 6. Kuinka pitkät kolmion kateetit ovat?

131. Kolme positiivista kokonaislukua m, n, p muodostavat *Pythagoraan kolmikon*, jos ne kelpaavat sellaisen suorakulmaisen kolmion sivuiksi, jonka hypotenuusan pituus on p, eli jos $m^2 + n^2 = p^2$. Esimerkiksi 3, 4, 5 on Pythagoraan kolmikko.

a) Osoita, että jos m, n, p on Pythagoraan kolmikko ja r on positiivinen kokonaisluku, niin myös rm, rn, rp on Pythagoraan kolmikko. Käytä tietoa hyväksesi ja muodosta kolmikosta 3, 4, 5 kolme uutta Pythagoraan kolmikkoa. Osoita edelleen, että Pythagoraan kolmikkoja on ääretön määrä.*

b) Osoita, että jos p on ykköstä suurempi kokonaisluku, niin $2p$, $p^2 - 1$, $p^2 + 1$ on Pythagoraan kolmikko. Käytä tietoa hyväksi ja muodosta kolme uutta Pythagoraan kolmikkoa.

132. Osoita, että jos a ja b $(a > b)$ ovat positiivisia kokonaislukuja, niin

$a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$

on Pythagoraan kolmikko. Käytä tietoa hyväksi ja muodosta kolme Pythagoraan kolmikkoa.

133. a) Onko olemassa tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka sivujen pituudet ovat kokonaislukuja?

b) Suorakulmaista kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat kokonaislukuja, sanotaan *melkein tasakylkiseksi*, jos kateettien pituuksien erotus on yksi. Osoita, että jos luvut a ja b tuottavat edellisessä tehtävässä kuvatulla tavalla melkein tasakylkisen suorakulmaisen kolmion, niin sellaisen tuottavat myös luvut $2a + b$ ja a. Käytä tietoa hyväksi ja muodosta luvuista $a = 2$ ja $b = 1$ lähtien kolme melkein tasakylkistä suorakulmaista kolmiota.

---

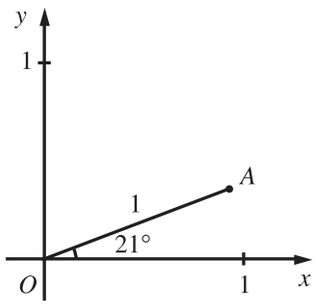
* On olemassa äärettömän monta sellaista positiivista kokonaislukua m, n ja p, että $m^2 + n^2 = p^2$, nimittäin kaikki Pythagoraan kolmikot. Ranskalainen Pierre de Fermat esitti 1600-luvulla väitteen, jota sittemmin on kutsuttu *Fermat'n lauseeksi:* Jos r on mikä tahansa lukua 2 suurempi kokonaisluku, niin *ei ole olemassa* sellaisia positiivisia kokonaislukuja m, n ja p, että $m^r + n^r = p^r$. Siis ei ole olemassa sellaisia positiivisia kokonaislukuja, että $m^3 + n^3 = p^3$, ei sellaisia, että $m^4 + n^4 = p^4$, jne. Fermat'n lauseen paikkansapitävyys säilyi vuosisatojen ajan eräänä matematiikan suurista ratkaisemattomista ongelmista. Ongelman kiehtovuutta lisäsi, että Fermat oli käsikirjoituksensa marginaaliin kirjoittanut, että hän tietää todistuksen lauseelle. Lopulta vuonna 1994 englantilainen Andrew Wiles todisti Fermat'n lauseen. Fermat'n lauseen historiasta ja todistusyrityksistä on kirjoitettu useita kirjoja, esimerkiksi Amir D. Aczel: Fermat'n teoreema, Helsinki 1998.

Tylpän kulman kosini ja sini

Tavoitteena on määritellä tylpän kulman kosini ja sini. Terävän kulman kosini ja sini on aikaisemmin määritelty suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien suhteina. Suorakulmaisen kolmion kulma ei voi olla tylppä, joten tätä määritelmää ei voida yleistää tylpille kulmille. Jotta voitaisiin määritellä tylpän kulman sini ja kosini, terävän kulman kosini ja sini on ensin tulkittava sellaisella tavalla, joka voidaan yleistää myös tylpälle kulmalle.

Ongelma 1

Origosta lähtevän janan OA pituus on 1, ja jana muodostaa 21°:n kulman positiivisen x-akselin kanssa. Määritä päätepisteen A x- ja y-koordinaattien tarkat arvot ja likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.



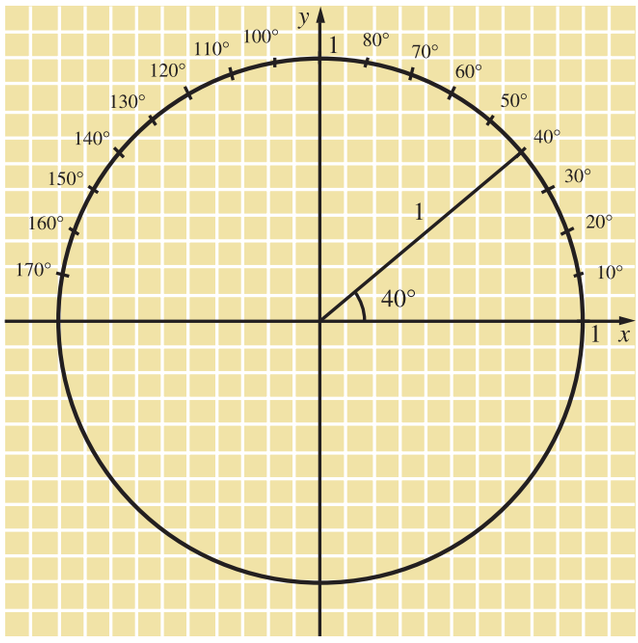
Ongelma 2

Ympyrän säde on 1. Määritä kuviosta yhden desimaalin tarkkuudella

a) cos 40° ja sin 40°

b) cos 70° ja sin 70°.

c) Anna ehdotus luvuiksi cos 140° ja sin 140°.



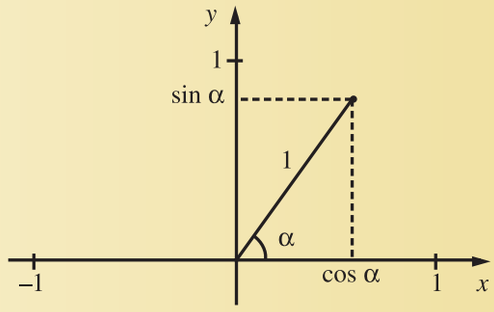
Terävän kulman α kosinin ja sinin tulkinta koordinaatteina

Piirretään origosta lähtevä jana, joka muodostaa positiivisen x-akselin kanssa kulman α ja jonka pituus on 1. Tällöin

$\cos\alpha$ on janan toisen päätepisteen x-koordinaatti

ja

$\sin\alpha$ on janan toisen päätepisteen y-koordinaatti.



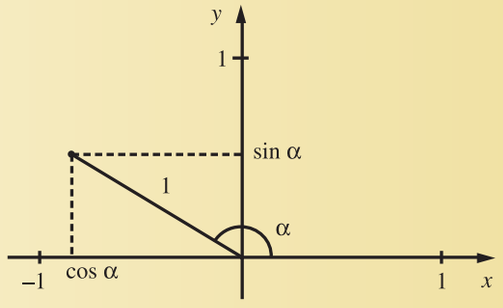
Terävän kulman kosinille ja sinille on nyt löydetty tulkinta, joka voidaan yleistää muille kulmille.

Kulman α kosinin ja sinin määritelmä, kun $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$

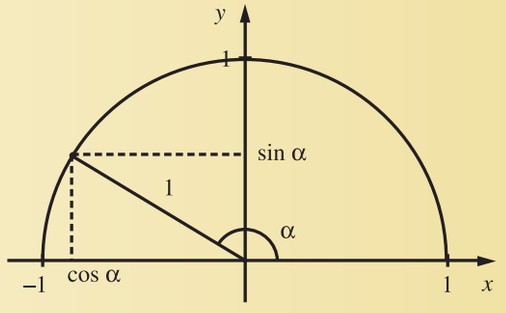
Piirretään origosta lähtevä jana, joka muodostaa positiivisen x-akselin kanssa kulman α ja jonka pituus on 1. Määritellään:

Kulman α *kosini* on janan toisen päätepisteen x-koordinaatti.

Kulman α *sini* on janan toisen päätepisteen y-koordinaatti.*



Kulman kosinin ja sinin määrittämistä voidaan yksinkertaistaa piirtämällä koordinaatistoon ympyrä, jonka keskipiste on origossa ja jonka säde on 1. Jos jana lähtee origosta ja sen pituus on 1, niin janan toinen päätepiste on ympyrän kehällä.

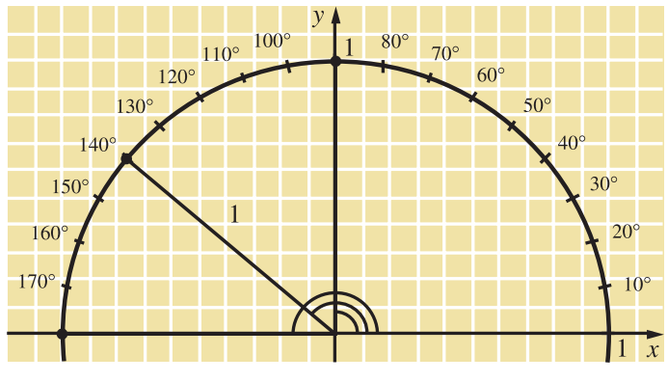


---

* Kosini ja sini voitaisiin määritellä samalla tavalla myös oikokulmaa suuremmille kulmille. Näin tehdään kurssissa Trigonometriset funktiot ja lukujonot, jossa perehdytään perusteellisemmin näiden trigonometristen funktioiden ominaisuuksiin. Tässä kurssissa siniä ja kosinia käytetään välineinä kolmioiden tutkimiseen, joten suurempia kulmia ei tarvita.

ESIMERKKI 1

Määritä kuviosta a) cos 90° ja sin 90° b) cos 180° ja sin 180° c) cos 140° ja sin 140°.



Ratkaisu

Luetaan kuviosta janan ympyrän kehällä olevan päätepisteen koordinaatit. x-koordinaatti on kulman kosini, ja y-koordinaatti on kulman sini.

a) Päätepisteen x-koordinaatti on 0 ja y-koordinaatti 1.
Siis $\cos 90° = 0$ ja $\sin 90° = 1$.

b) Päätepisteen x-koordinaatti on -1 ja y-koordinaatti 0.
Siis $\cos 180° = -1$ ja $\sin 180° = 0$.

c) Päätepisteen x-koordinaatti on noin $-0{,}77$ ja y-koordinaatti noin $0{,}64$.
Siis $\cos 140° \approx -0{,}77$ ja $\sin 140° \approx 0{,}64$.

Vastaus

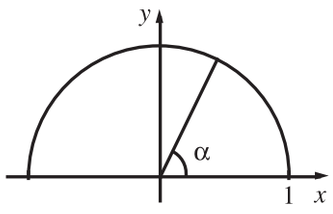
a) $\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$
b) $\cos 180° = -1$, $\sin 180° = 0$
c) $\cos 140° \approx -0{,}77$, $\sin 140° \approx 0{,}64$

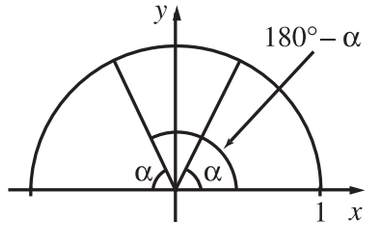
Ongelma 3

Oletetaan, että origosta alkavan ykkösen mittaisen janan ja positiivisen x-akselin välinen kulma on α. Jana peilataan y-akselin suhteen. Peilatun janan ja positiivisen x-akselin välinen kulma on kulman α peilikuvan vieruskulma eli suuruudeltaan $180° - \alpha$. Tutki, kuinka janan toisen päätepisteen koordinaatit muuttuvat peilauksessa, ja täydennä:

$\cos(180° - \alpha) =$

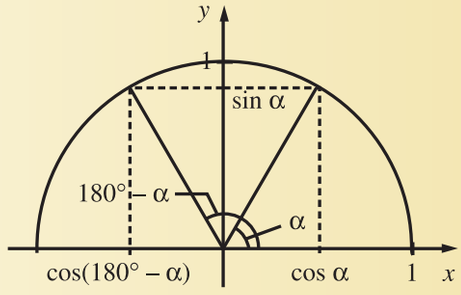
$\sin(180° - \alpha) =$





Kulmaa $180° - \alpha$ kutsutaan kulman α *suplementtikulmaksi*.

Kun origosta alkava jana peilataan y-akselin suhteen, janan ja positiivisen x-akselin välinen kulma muuttuu suplementtikulmaksi. Peilauksessa janan toisen päätepisteen x-koordinaatti vaihtuu vastaluvuksi ja y-koordinaatti pysyy samana. Nämä havainnot voidaan muotoilla kosinin ja sinin ominaisuuksina.



Kosinin symmetrialause

Kulman ja sen suplementtikulman kosinit ovat toistensa vastalukuja.

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

Sinin symmetrialause

Kulman ja sen suplementtikulman sinit ovat yhtä suuret.

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

ESIMERKKI 3

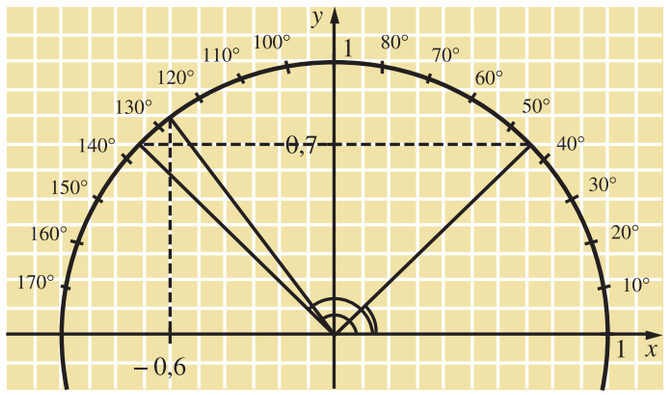
Kuinka moni välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ oleva kulma toteuttaa yhtälön a) $\cos\alpha = -0{,}6$ b) $\sin\alpha = 0{,}7$? Määritä yhtälön ratkaisut graafisesti ja tarkista laskimella.

Ratkaisu

a) Janan toisen päätepisteen x-koordinaatin tulee olla $-0{,}6$. Kuvion perusteella yhtälöllä $\cos\alpha = -0{,}6$ on yksi ratkaisu, $\alpha \approx 127°$.

Laskimella saadaan:*

$\alpha = 126{,}8698...°$.



b) Janan toisen päätepisteen y-koordinaatin tulee olla $0{,}7$. Kuvion perusteella yhtälöllä $\sin\alpha = 0{,}7$ on kaksi ratkaisua, $\alpha \approx 44°$ ja $\alpha \approx 136°$.

Laskimella saadaan:

$\alpha = 44{,}4270...°$.

Laskin antaa terävän kulman likiarvon. Yhtälön tylppä ratkaisu on laskimella saadun kulman suplementtikulma.

$\alpha = 180° - 44{,}4270...° = 135{,}5729...°$

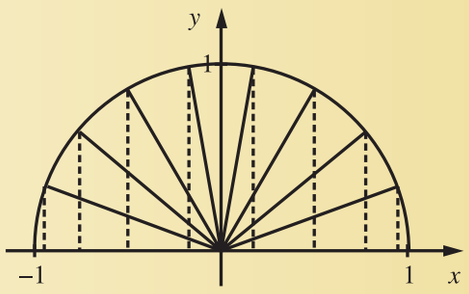
Vastaus

a) yksi, $127°$ b) kaksi, $44°$ ja $136°$

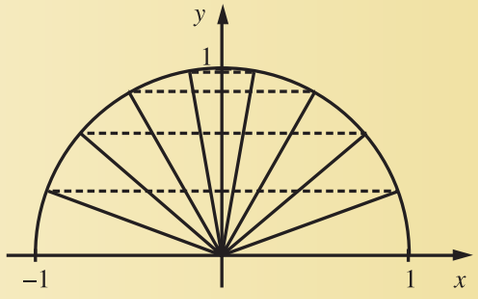
---

* Näppäily [cos⁻¹] [(-)] 0.6 tai 0.6 [±] [cos⁻¹].

Kun kulman α suuruus vaihtelee välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, kulman α kosini vaihtelee välillä $[-1, 1]$. Terävän kulman kosini on positiivinen ja tylpän kulman negatiivinen. Kahdella eri kulmalla ei voi olla yhtä suurta kosinia.



Kulman α sini vaihtelee välillä $[0, 1]$. Kaikki muut arvot paitsi arvo 1 saadaan kahdella eri α:n arvolla, sillä kulmalla ja sen suplementtikulmalla on sama sini.



Kulman α ratkaiseminen yhtälöstä $\cos \alpha = a$

Yhtälön $\cos \alpha = a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$ toteuttaa yksi ainoa välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulma.
Kulman α likiarvo saadaan laskimen näppäimellä $\boxed{\cos^{-1}}$.

Kulman α ratkaiseminen yhtälöstä $\sin \alpha = a$

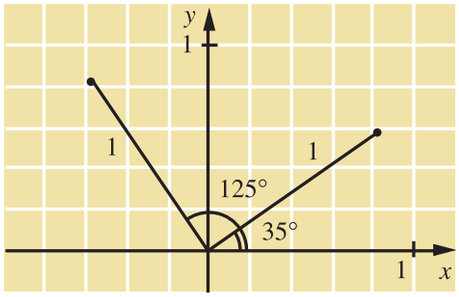
Yhtälön $\sin \alpha = a$ $(0 \leqslant a < 1)$ toteuttaa kaksi välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmaa. Ratkaisut ovat toistensa suplementtikulmia.
Terävän kulman α likiarvo saadaan laskimen näppäimellä $\boxed{\sin^{-1}}$.
Tylpän kulman α likiarvo saadaan vähentämällä laskimella saatu kulma $180°$:sta.

Yhtälön $\sin \alpha = 1$ ainoa ratkaisu on $\alpha = 90°$.

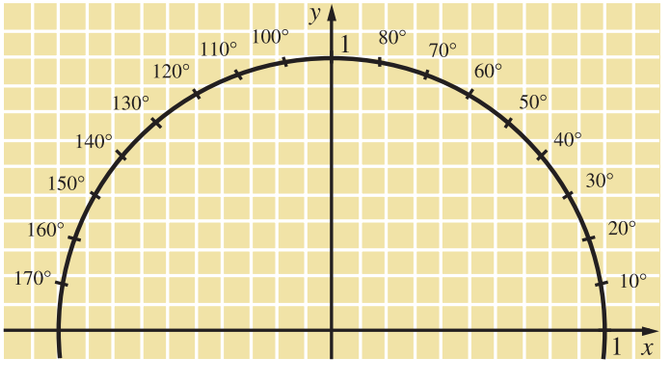
TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

134. Päättele kuviosta yhden desimaalin tarkkuudella
a) $\cos 35°$ ja $\sin 35°$
b) $\cos 125°$ ja $\sin 125°$.



Ratkaise tehtävät 135 – 137 seuraavan puoliympyrän avulla.



135. Määritä.
a) $\cos 0°$ b) $\cos 60°$
c) $\cos 90°$ d) $\cos 130°$
e) $\cos 180°$

136. Määritä.
a) $\sin 0°$ b) $\sin 30°$
c) $\sin 90°$ d) $\sin 170°$
e) $\sin 180°$

137. Määritä kaikki välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmat, joille
a) $\cos \alpha = 0{,}3$ b) $\cos \alpha = -0{,}2$
c) $\sin \alpha = 0{,}5$ d) $\sin \alpha = 0{,}8$.

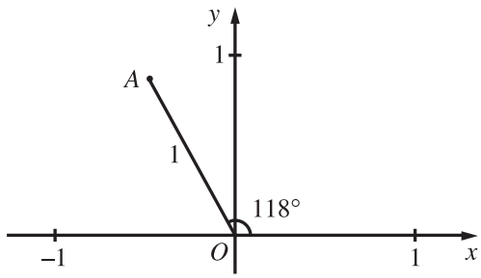
138. Määritä laskimella asteen kymmenesosan tarkkuudella kaikki välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmat, joille
a) $\cos \alpha = -0{,}35$ b) $\sin \alpha = 0{,}16$
c) $\cos \alpha = 0{,}87$ d) $\sin \alpha = 0{,}76$.

139. Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) tylppä kulma α, jolle $\sin \alpha = 0{,}11$
b) terävä kulma α, jolle $\sin \alpha = 0{,}61$
c) välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ olevat kulmat, joiden kosini on $-0{,}45$.

140. Päättele käyttämättä laskinta, onko kulma α terävä vai tylppä, jos
a) $\cos \alpha = 0{,}87$ b) $\cos \alpha = -0{,}07$
c) $\sin \alpha = 0{,}11$.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

141. Ilmaise pisteen A koordinaatit $118°$:n kulman kosinin ja sinin avulla. Määritä laskimella koordinaattien kolmidesimaaliset likiarvot.



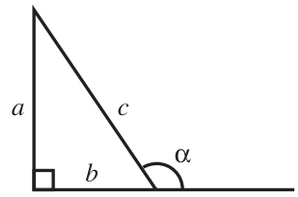
142. a) Määritä laskimella kolmen desimaalin tarkkuudella $\cos 108°$. Millä toisella välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmalla on yhtä suuri kosini?
b) Määritä laskimella kolmen desimaalin tarkkuudella $\sin 155°$. Millä toisella välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmalla on yhtä suuri sini?
c) Määritä laskimella kolmen desimaalin tarkkuudella $\sin 81°$. Millä toisella välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmalla on yhtä suuri sini?

143. Määritä ilman laskinta kulman α suplementtikulman $180° - \alpha$ sini ja kosini, kun
a) $\sin\alpha = 0{,}6$ ja $\cos\alpha = 0{,}8$
b) $\sin\alpha = 0{,}28$ ja $\cos\alpha = -0{,}96$.

144. Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella kaikki välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmat, joille
a) $\cos\alpha = 0{,}17$ b) $\cos\alpha = -0{,}48$
c) $\sin\alpha = 0{,}25$ d) $\sin\alpha = -0{,}89$.

145. Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) tylppä kulma, jonka sini on $0{,}96$
b) terävä kulma, jonka sini on $0{,}16$
c) kaikki välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmat, joiden sini on $0{,}72$.

146. Osoita, että alla olevassa kuviossa on
a) $a = c \sin\alpha$ b) $b = -c \cos\alpha$.



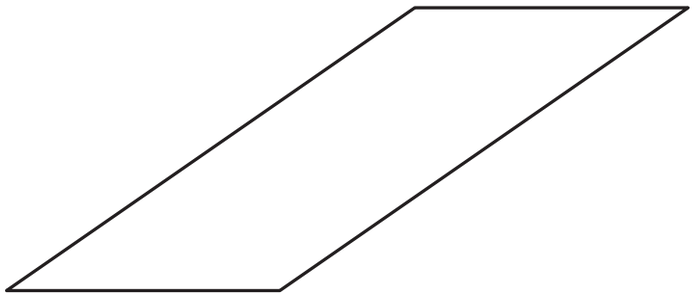
147. a) Kun kulma α on terävä, niin $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ voidaan määritellä suorakulmaisen kolmion sivujen suhteina. Osoita, että määritelmistä seuraa, että $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

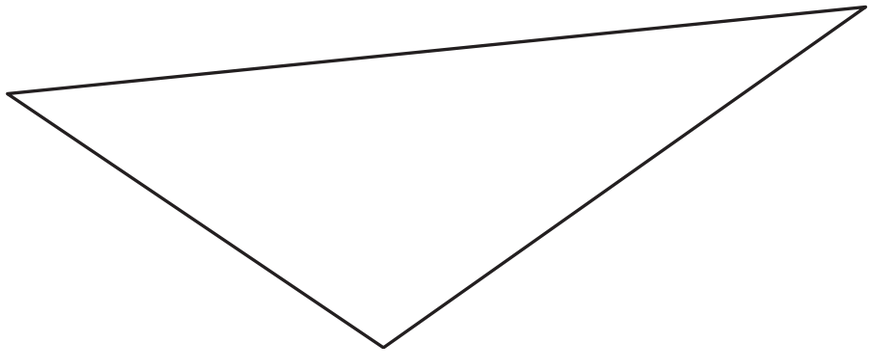
b) Kun kulma α ei ole terävä, niin kulman α tangentti *määritellään* yhtälöllä $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

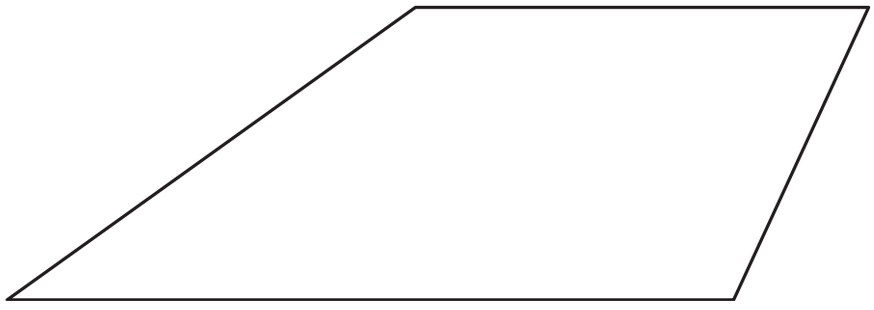
Määritä Sarjassa I olevan puoliympyrän avulla $\sin 110°$ ja $\cos 110°$ ja edelleen määritelmän mukaisesti $\tan 110°$. Tarkista laskimella.

Pinta-aloja

Ongelma Tee tarvittavat mittaukset ja laske suunnikkaan, kolmion ja puolisuunnikkaan pinta-ala.



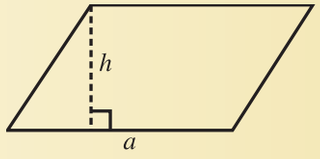


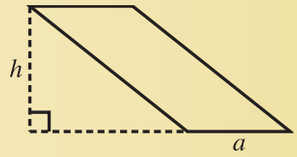


Suunnikkaan pinta-ala

Suunnikkaan pinta-ala on sivun pituuden ja sivulle tai sivun jatkeelle piirretyn korkeuden tulo.

$$A = ah$$

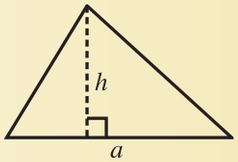


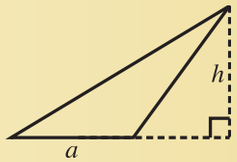


Kolmion pinta-ala

Kolmion pinta-ala on puolet kolmion sivun pituuden ja sivulle tai sivun jatkeelle piirretyn korkeuden tulosta.

$$A = \frac{1}{2}ah$$



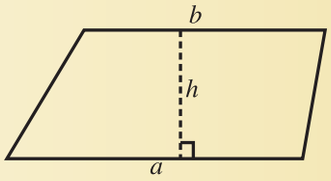


Puolisuunnikkaan pinta-ala

Puolisuunnikas on nelikulmio, jossa on kaksi keskenään yhdensuuntaista sivua.

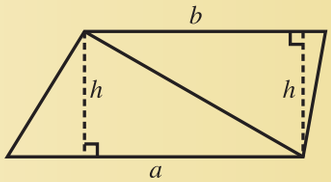
Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon ja korkeuden tulo.

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Puolisuunnikkaan pinta-alakaavan perustelu

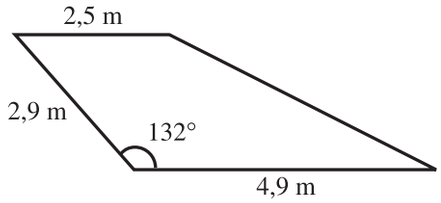
Piirretään puolisuunnikkaan lävistäjä. Puolisuunnikkaan pinta-ala on kahden samankorkuisen kolmion pinta-alojen summa.



$$A = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{ah+bh}{2} = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

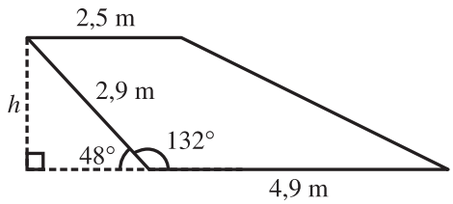
ESIMERKKI 1

Laske kuvion puolisuunnikkaan pinta-ala.



Ratkaisu

Korkeusjanan pituus voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta, jossa on terävä kulma $180° - 132° = 48°$.



$$\sin 48° = \frac{h}{2{,}9} \qquad \mid \cdot 2{,}9$$

$$h = 2{,}9 \cdot \sin 48°$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

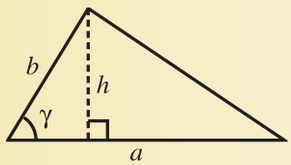
$$A = \frac{4{,}9 + 2{,}5}{2} \cdot 2{,}9 \cdot \sin 48°$$

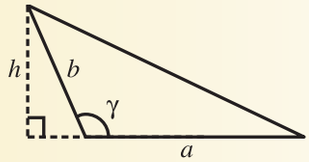
Yhdensuuntaisten sivujen keskiarvon ja korkeuden tulo.

$$\approx 8{,}0 \ \ (\mathrm{m}^2).$$

Vastaus $8{,}0 \ \mathrm{m}^2$

Jos tunnetaan kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma, niin kolmion pinta-ala voidaan laskea niin, että ensin ratkaistaan edellisen esimerkin tavoin korkeusjanan pituus trigonometrian avulla.



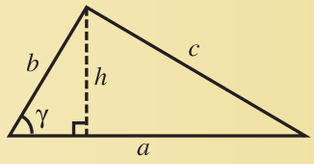


Tilanteet, joissa kulma γ on terävä tai joissa kulma γ on tylppä, johtavat näennäisesti erilaisiin laskuihin. Tilanteet voidaan kuitenkin yhdistää käyttämällä edellisessä luvussa opittua tylpän kulman siniä ja sinin symmetrialausetta.

Jos kulma γ on terävä, niin:

$$\sin\gamma = \frac{h}{b} \qquad | \cdot b$$

$$h = b\sin\gamma$$

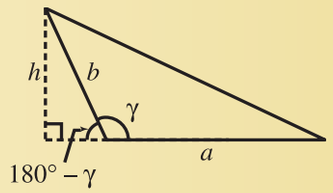


Jos kulma on γ tylppä, niin:

$$\sin(180° - \gamma) = \frac{h}{b} \qquad | \cdot b$$

$$h = b\sin(180° - \gamma)$$

$$h = b\sin\gamma$$



Sinin symmetrialause: $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$

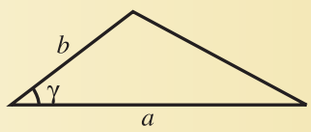
Siis riippumatta siitä, onko kulma γ terävä vai tylppä, aina on $h = b\sin\gamma$.

Sijoittamalla kolmion pinta-alan kaavaan $A = \frac{1}{2}ah$ saadaan:

Kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava

Jos a ja b ovat kolmion kaksi sivua ja γ näiden sivujen välinen kulma, niin kolmion pinta-ala on

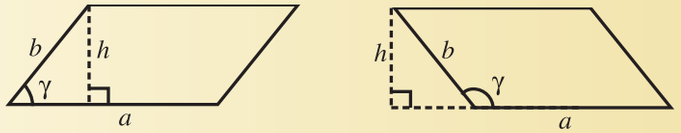
$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$



Siis kolmion pinta-ala on puolet kahden sivun pituuden ja näiden sivujen välisen kulman sinin tulosta.*

---

* Vastaava kaava pätee myös suunnikkaalle. Riippumatta siitä, onko kulma γ terävä tai tylppä, niin korkeus $h = b\sin\gamma$ ja $A = ab\sin\gamma$.

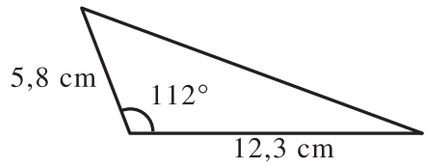


ESIMERKKI 2

Kolmion kahden sivun pituudet ovat 12,3 cm ja 5,8 cm. Näiden sivujen välisen kulman suuruus on 112°. Laske kolmion pinta-ala.

Ratkaisu

Kolmiosta tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma.



Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12{,}3 \cdot 5{,}8 \cdot \sin 112°$$
$$\approx 33 \ (\text{cm}^2).$$

$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, missä a ja b ovat kolmion kaksi sivua ja γ niiden välinen kulma.

Vastaus

33 cm^2

ESIMERKKI 3

Kolmion kahden sivun pituudet ovat 3,8 cm ja 2,7 cm. Kuinka suuri näiden sivujen välinen kulma on, kun kolmion pinta-ala on $3{,}2\ \text{cm}^2$? Piirrä kolmio.

Ratkaisu

Määritetään tunnettujen sivujen välisen kulman γ sini ja edelleen kulma γ.

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = A \qquad \mid \cdot 2$$

$$ab\sin\gamma = 2A \qquad \mid : ab$$

$$\sin\gamma = \frac{2A}{ab}$$

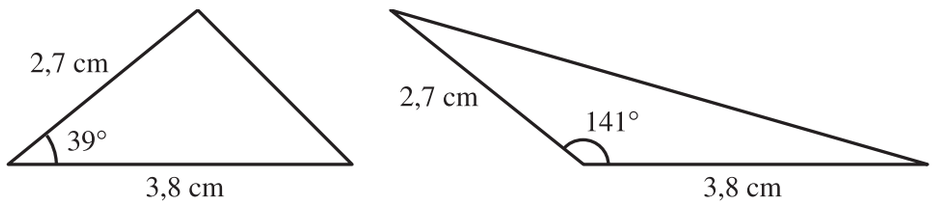
Sijoitetaan pinta-ala ja sivujen pituudet.

$$\sin\gamma = \frac{2 \cdot 3{,}2}{3{,}8 \cdot 2{,}7} \quad (\approx 0{,}624)$$

$\gamma \approx 39°$ tai $\gamma \approx 180° - 39° = 141°$

Terävä kulma saadaan laskimella. Toinen ratkaisu on laskimella saadun kulman suplementtikulma.

Piirretään kolmiot:*



Vastaus

39° tai 141°

---

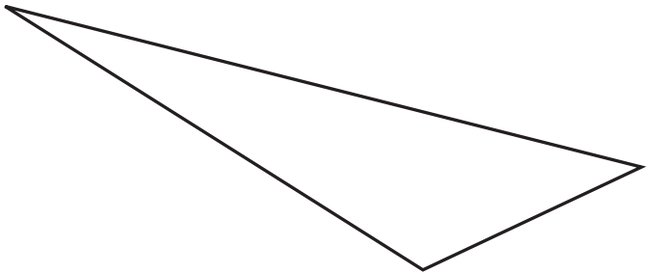
* Oikein piirretyt kolmiot ovat yhtä korkeita, sillä niillä on yhtä pitkä sivu ja sama pinta-ala.

TEHTÄVIÄ

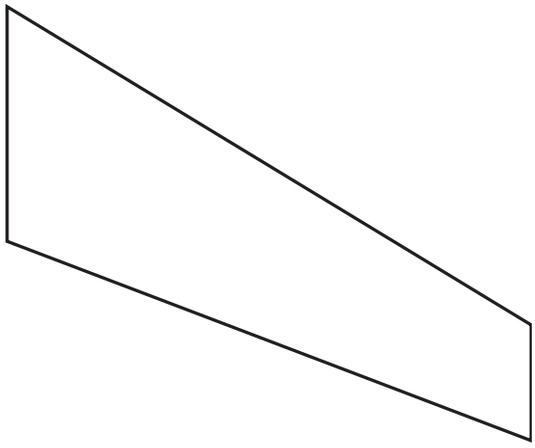
SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

148. Tee tarvittavat mittaukset ja laske kolmion ja puolisuunnikkaan pinta-ala.

a)

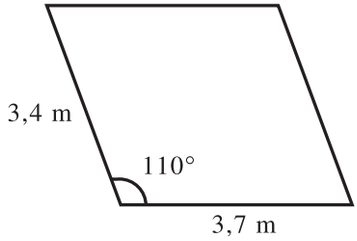


b)

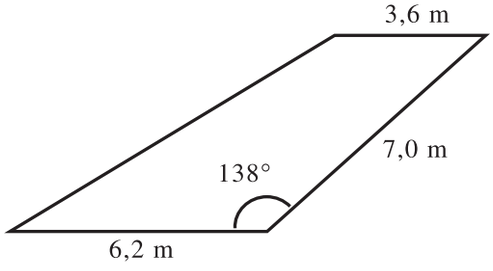


149. Laske suunnikkaan ja puolisuunnikkaan pinta-ala.

a)



b)



150. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 12,6 cm ja 25,1 cm, ja näiden sivujen välinen kulma on 167°. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on? Millä toisella kolmiolla, jossa on 12,6 cm:n ja 25,1 cm:n mittaiset sivut, on sama pinta-ala?

151. Kolmion pinta-ala on 12 cm^2. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 7,2 cm ja 6,3 cm. Kuinka suuri näiden sivujen välinen kulma on? Piirrä kolmio.

152. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 5,2 cm. Kuinka suuri huippukulman tulee olla, jotta kolmion pinta-ala olisi 8,6 cm^2?

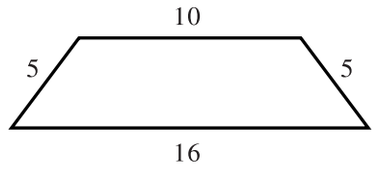
153. Suunnikkaassa $ABCD$ sivun AB pituus on 5,6 cm ja sivun AD pituus 7,8 cm. Kuinka suuri suunnikkaan pinta-ala on, jos kulman A suuruus on a) 23° b) 106°?
c) Kuinka suuri kulma A on, jos suunnikkaan pinta-ala on 9,0 cm^2?

154. Kolmiossa ABC sivun AB pituus on 4,9 cm ja kulman A suuruus 117°. Kolmion pinta-ala on 8,1 cm^2. Kuinka pitkä sivu AC on?

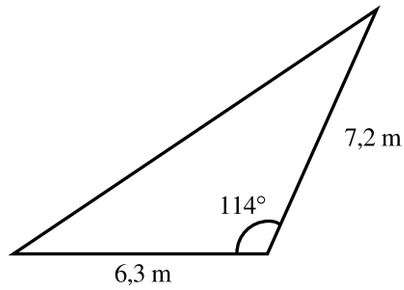
155. Puolisuunnikkaan pinta-ala on 30, yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 9 ja 6, ja toisen erisuuntaisen sivun pituus on 5. Kuinka pitkä puolisuunnikkaan neljäs sivu on? Huomaa kaksi ratkaisua.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

156. Puolisuunnikas on *tasakylkinen*, jos siinä kahden yhdensuuntaisen sivun lisäksi on kaksi yhtä pitkää sivua. Laske kuvion tasakylkisen puolisuunnikkaan pinta-ala.



157. Laske kolmion pinta-ala.



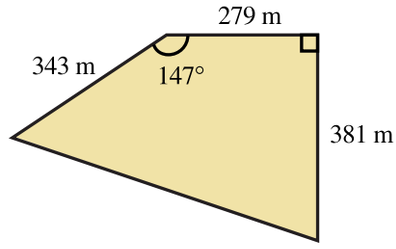
158. Rimat, joiden pituudet ovat 5,3 m ja 3,6 m, liitetään päistään yhteen, minkä jälkeen muodostetaan kolmio yhdistämällä toiset päätepisteet. Kuinka suuri rimojen välisen kulman tulee olla, jotta kolmion pinta-ala olisi 6,0 m^2?

159. Tasakylkisen kolmion kylki on 7,2 cm.
a) Laske kolmion pinta-ala, jos huippukulma on 140°.
b) Kuinka suuri huippukulma on, jos kolmion pinta-ala on 9,9 cm^2?

160. Suunnikkaan erisuuntaisten sivujen pituudet ovat 7,2 cm ja 4,1 cm. Suunnikkaan pinta-ala on 20,0 cm^2. Kuinka suuret suunnikkaan kulmat ovat?

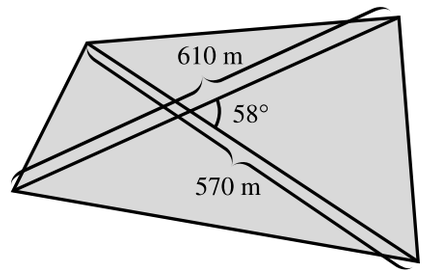
161. Suunnikkaan lävistäjien pituudet ovat 7,4 cm ja 5,8 cm. Lävistäjien välisen terävän kulman suuruus on 29°. Kuinka suuri suunnikkaan pinta-ala on?
(Ohje: Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.)

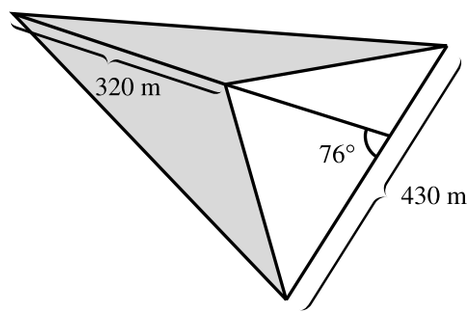
162. Kuinka suuri pellon pinta-ala on? Anna vastaus hehtaareina.



163. Muodosta lauseke 1-säteisen ympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion pinta-alalle. Laske pinta-ala viiden desimaalin tarkkuudella n:n arvoilla 1 000 ja 10 000. Muotoile *hypoteesi* eli otaksuma 1-säteisen ympyrän alan suuruudesta.

164. a) Osoita, että nelikulmion pinta-ala voidaan laskea kaavalla $A = \frac{1}{2}uv \sin\alpha$, missä u ja v ovat nelikulmion lävistäjien pituudet ja α lävistäjien välinen kulma. Huomaa, että on käsiteltävä erikseen tapaukset, joissa lävistäjien leikkauspiste on nelikulmion sisällä ja nelikulmion ulkopuolella.
b) Laske a-kohdan kaavan avulla metsäpalstojen pinta-alat.

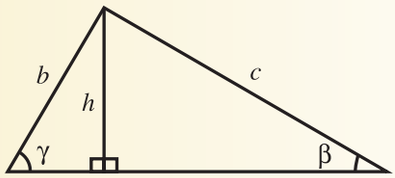




Sinilause

Nyt siirrytään tutkimaan niin sanottujen vinokulmaisten (ei-suorakulmaisten) kolmioiden trigonometriaa. Tässä luvussa johdettavalla sinilauseella ja seuraavan luvun kosinilauseella voidaan ratkaista vinokulmaisten kolmioiden osia.

Sinilause perustuu havaintoon, että kolmion korkeusjana h voidaan ilmaista kahdella eri tavalla.



Vasemmanpuoleisessa suorakulmaisessa kolmiossa on

$\sin\gamma = \frac{h}{b}$, joten $h = b\sin\gamma$.

Oikeanpuoleisessa suorakulmaisessa kolmiossa on

$\sin\beta = \frac{h}{c}$, joten $h = c\sin\beta$.

Siis

$b\sin\gamma = c\sin\beta$.

Sinin symmetrialauseen avulla nähdään (kuten kolmion pinta-alan trigonometrisen kaavan johdossa), että yhtälö pätee myös silloin, kun kulma β tai γ on tylppä.

Kun yhtälö muokataan helpommin muistettavaan muotoon, saadaan sinilause.

$b\sin\gamma = c\sin\beta$ Jaetaan tulolla $\sin\beta \cdot \sin\gamma$.

$$\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} = \frac{c\sin\beta}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$ Supistetaan.

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Vasemmalla puolella on kolmion yhden sivun ja sen vastaisen kulman sinin suhde. Oikealla puolella on kolmion toisen sivun ja sen vastaisen kulman sinin suhde. On johdettu seuraava lause.

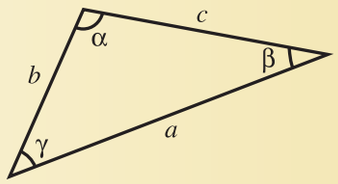
Sinilause

Jos kolmiosta valitaan mitkä tahansa kaksi sivua, niin niille ovat suhteet

$$\frac{\text{sivun pituus}}{\text{vastaisen kulman sini}}$$

yhtä suuret.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$



Myös:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

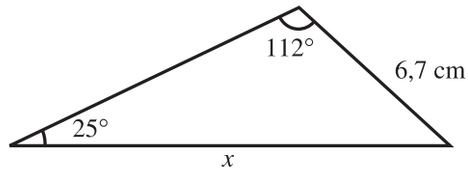
$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

ESIMERKKI 1

Kolmion kaksi kulmaa ovat suuruudeltaan $112°$ ja $25°$. Näistä pienemmän kulman vastaisen sivun pituus on $6{,}7$ cm. Kuinka pitkiä kolmion muut sivut ovat?

Ratkaisu

Ratkaistaan ensin $112°$:n kulman vastaisen sivun pituus x.*
Sinilauseen mukaan sivun pituuden x suhde vastaisen $112°$:n kulman siniin on yhtä suuri kuin sivun pituuden $6{,}7$ suhde vastaisen $25°$:n kulman siniin.



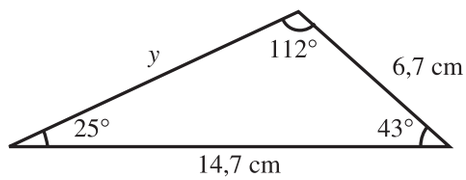
$$\frac{x}{\sin 112°} = \frac{6{,}7}{\sin 25°} \qquad \big| \cdot \sin 112°$$

Voidaan myös kertoa ristiin.

$$x = \frac{6{,}7 \cdot \sin 112°}{\sin 25°} \approx 14{,}7 \text{ (cm)}$$

Kolmannen sivun y ratkaisemiseksi lasketaan ensin sivun vastaisen kulman suuruus:

$180° - 112° - 25° = 43°$



Käytetään sinilausetta.

$$\frac{y}{\sin 43°} = \frac{6{,}7}{\sin 25°} \qquad \big| \cdot \sin 43°$$

$$y = \frac{6{,}7 \cdot \sin 43°}{\sin 25°} \approx 10{,}8 \text{ (cm)}$$

Vastaus

$112°$:n kulman vastainen sivu $14{,}7$ cm, kolmas sivu $10{,}8$ cm

---

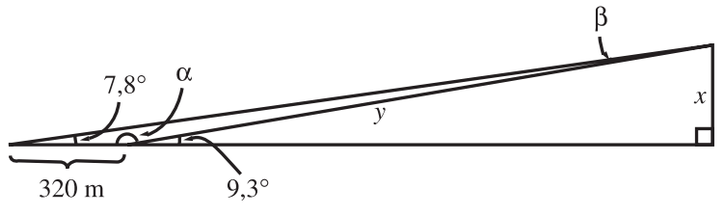
* Tarkka mallikuva piirretään niin, että lasketaan ensin kolmannen kulman suuruus ($43°$) ja piirretään $6{,}7$ cm pitkän sivun päähän oikeankokoiset kulmat.

ESIMERKKI 2

Tunturin huippu näkyi viereisen järven jäältä $9{,}3°$ järven pinnan tason yläpuolella. Kun siirryttiin 320 metriä kauemmaksi tunturista, huippu näkyi $7{,}8°$:n korkeudella. Kuinka suuri huipun ja järven korkeusero on?

Ratkaisu

Jos saadaan selville jommankumman katsomiskohdan etäisyys huipusta, niin korkeus x voidaan ratkaista suorakulmaisen kolmion trigonometrialla.



Ratkaistaan etäisyys y. Kolmiossa, jonka määrävät katsomiskohdista huippuun piirretyt janat, tunnetaan sivun y vastainen kulma $7{,}8°$. Lasketaan 320 m:n sivun vastaisen kulman β suuruus.

$$\alpha = 180° - 9{,}3° = 170{,}7°$$

$$\beta = 180° - 7{,}8° - \alpha = 180° - 7{,}8° - 170{,}7° = 1{,}5°$$

Nyt voidaan käyttää sinilausetta.

$$\frac{y}{\sin\ 7{,}8°} = \frac{320}{\sin\ 1{,}5°} \qquad \big| \cdot \sin 7{,}8°$$

$$y = \frac{320 \cdot \sin 7{,}8°}{\sin 1{,}5°} \quad (\approx 1\,660)$$

Ratkaistaan korkeus x suorakulmaisen kolmion trigonometrialla.

$$\sin 9{,}3° = \frac{x}{y} \qquad \big| \cdot y$$

$$x = y \cdot \sin 9{,}3° = \frac{320 \cdot \sin 7{,}8° \cdot \sin 9{,}3°}{\sin 1{,}5°} \approx 270 \ \text{(m)}$$

Vastaus

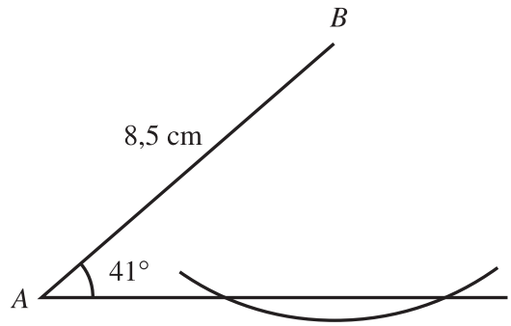
270 m

ESIMERKKI 3

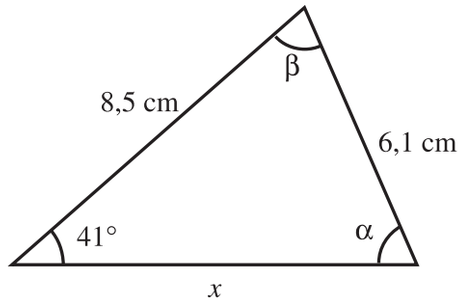
Kolmion kahden sivun pituudet ovat 8,5 cm ja 6,1 cm. Jälkimmäisen sivun vastainen kulma on 41°. Piirrä kolmio ja laske kolmion muiden osien (kahden muun kulman ja kolmannen sivun) suuruudet.

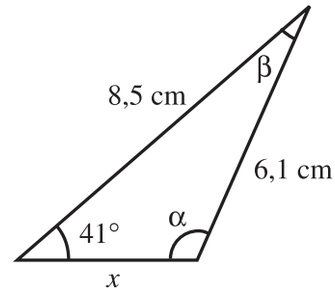
Ratkaisu

Piirretään mittasuhteiltaan oikea kuvio. Piirretään ensin 41°:n kulma ja erotetaan sen toiselta kyljeltä 8,5 cm:n pituista sivua vastaava sivu AB. (Alla olevan kuvion sivujen pituudet ovat puolet todellisista.) Kulman A vastaista 6,1 cm:n pituista sivua vastaava sivu täydennetään kuvioon harpilla. Piste B keskipisteenä ja 6,1 cm:ä vastaava pituus säteenä piirretty ympyrän kaari leikkaa kulman A toisen kyljen kahdessa pisteessä.



Tehtävän lähtökohdat johtavat siis kahteen erilaiseen kolmioon: toisessa kolmiossa 8,5 cm pitkän sivun vastainen kulma α on terävä ja toisessa tylppä.





Kulma α ratkaistaan sinilauseella.

$$\frac{8{,}5}{\sin\alpha} = \frac{6{,}1}{\sin 41°}$$

Kerrotaan ristiin.

$$6{,}1 \cdot \sin\alpha = 8{,}5 \cdot \sin 41° \quad | : 6{,}1$$

$$\sin\alpha = \frac{8{,}5 \cdot \sin 41°}{6{,}1} \approx 0{,}9142$$

$\alpha \approx 66{,}09°$ tai $\alpha \approx 180° - 66{,}09° = 113{,}91°$

Terävä kulma saadaan laskimella. Toinen ratkaisu on laskimella saadun kulman suplementtikulma.

$\alpha \approx 66°$ tai $\alpha \approx 114°$

Lasketaan kulman α kahta eri arvoa vastaavat kulman β suuruudet.

Kun $\alpha \approx 66{,}09°$, niin $\beta \approx 180° - 41° - 66{,}09° = 72{,}91° \approx 73°$.

Kun $\alpha \approx 113{,}91°$, niin $\beta \approx 180° - 41° - 113{,}91° = 25{,}09° \approx 25°$.

Ratkaistaan vastaavat kolmannen sivun pituudet.

Teräväkulmainen kolmio:

$$\frac{x}{\sin 72{,}91°} = \frac{6{,}1}{\sin 41°} \quad | \cdot \sin 72{,}91°$$

$$x = \frac{6{,}1 \cdot \sin 72{,}91°}{\sin 41°} \approx 8{,}9 \text{ (cm)}$$

Tylppäkulmainen kolmio:

$$\frac{x}{\sin 25{,}09°} = \frac{6{,}1}{\sin 41°} \quad | \cdot \sin 25{,}09°$$

$$x = \frac{6{,}1 \cdot \sin 25{,}09°}{\sin 41°} \approx 3{,}9 \text{ (cm)}$$

Vastaus

Kaksi ratkaisua: 8,5 cm:n sivun vastainen kulma 66°, kolmas kulma 73° ja kolmas sivu 8,9 cm; tai vastaavasti 114°, 25° ja 3,9 cm

Kolmion osien ratkaiseminen sinilauseen avulla

Sinilauseen avulla voidaan ratkaista kolmion muut osat (kulmat ja sivut) seuraavissa tapauksissa.

- Kolmiosta tunnetaan *kaksi kulmaa ja yksi sivu.*

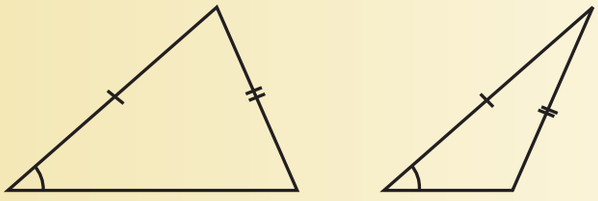
Kolmas kulma saadaan vähentämällä tunnetut kulmat 180°:sta.
Tuntemattomat sivut ratkaistaan sinilauseella.

- Kolmiosta tunnetaan *kaksi sivua ja näistä toisen sivun vastainen kulma.*

Toisen tunnetun sivun vastainen kulma saadaan sinilauseella.
Kolmas kulma saadaan vähentämällä muut kulmat 180°:sta.
Kolmas sivu saadaan sinilauseella.

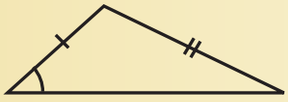
Ratkaisuja voi olla

kaksi (esimerkki 3)



tai

yksi (harjoitus 169).

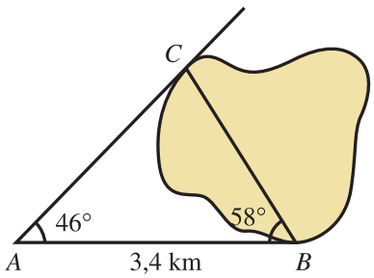


TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

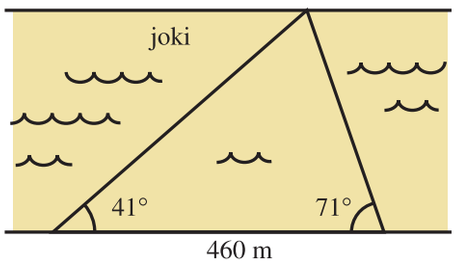
165. Kolmion kahden kulman suuruudet ovat $77°$ ja $61°$. Näistä suuremman kulman vastaisen sivun pituus on 17,5 cm. Laske kolmion muiden sivujen pituudet.

166. Kuinka pitkä on etäisyys BC järven yli?



167. Rotkon reunalta näkyi toisella puolella kasvavan puun latva $19°$:n korkeudella. 35 metriä kauempaa latva näkyi $13°$:n korkeudella. Kuinka leveä rotko on?

168. Joen leveys määritettiin vastarannalla olevan kiintopisteen avulla. Kuinka leveä joki on?



169. Kolmiossa ABC kulman A suuruus on $72°$, sivun AB pituus 5,8 cm ja sivun BC pituus 8,3 cm. Piirrä kolmio ja laske kolmion kulmien C ja B suuruudet sekä sivun AC pituus.

170. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 7,2 cm ja 6,2 cm. Jälkimmäisen sivun vastainen kulma on $51°$. Piirrä kolmio ja laske kolmion muiden kulmien ja sivujen suuruudet. Selvitä ensin ratkaisujen lukumäärä kuvion avulla.

171. Majakan ja laivan valot näkyvät luotsiasemalle suunnissa, joiden välinen kulma on $18°$. Majakan etäisyys asemasta on 7,2 km, ja laiva ilmoittaa etäisyytensä majakasta olevan 3,7 km. Kuinka etäällä luotsiasemasta laiva on?

172. Kahden merimerkin A ja B välimatkan määrittämiseksi mitattiin rannalla jana CD, jonka pituus on 148 metriä ja joka oli valittu niin, että C:stä katsottuna merkki B peittää merkin A. Edelleen mitattiin kulmat $\sphericalangle BCD = 54{,}1°$, $\sphericalangle CDB = 41{,}6°$ ja $\sphericalangle CDA = 103{,}7°$. Laske etäisyys AB.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

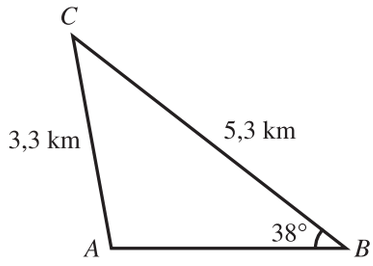
173. Kolmiosta tunnetaan kaksi kulmaa, joiden suuruudet ovat $32°$ ja $81°$, sekä niiden välinen sivu, jonka pituus on 9,3 cm. Laske muiden sivujen pituudet.

174. Kolmion kaksi kulmaa ovat $52°$ ja $108°$. Näistä suuremman kulman vastaisen sivun pituus on 12,1 cm. Laske kolmion pinta-ala.

175. Kun lentokone ylitti kahden ilmavalvonta-aseman välisen linjan, se näkyi toiselta asemalta $79°$:n korkeudella ja toiselta $66°$:n korkeudella. Asemien etäisyys on 5,2 kilometriä. Kuinka korkealla lentokone lensi?

176. Etääntyvä lentokone, jonka nopeudeksi tiedettiin 920 km/h, näkyi eräällä hetkellä $78°$:n korkeudella ja 36 sekuntia myöhemmin $47°$:n korkeudella. Kuinka korkealla lentokone lensi? (Ohje: 36 sekuntia on tunnin sadasosa.)

177. Kulma A on tylppä. Laske sivun AB pituus.



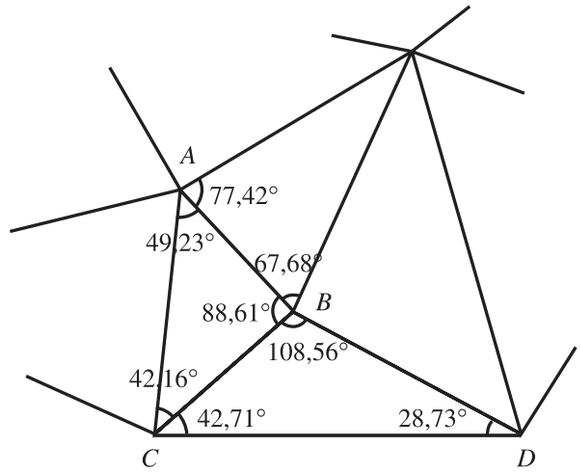
178. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 4,6 cm ja 8,7 cm. Jälkimmäisen sivun vastainen kulma on 137°. Piirrä kolmio ja laske muiden kulmien ja sivujen suuruudet.

179. Auringon jo noustua Venus – planeetoista kirkkain – näkyi vielä aamutaivaalla Auringon yläpuolella 42° Aurinkoa korkeammalla. Venuksen etäisyys Auringosta on $108 \cdot 10^6$ km ja Maan etäisyys Auringosta $150 \cdot 10^6$ km. Mikä oli Venuksen etäisyys Maasta tuona aamuna?

180. Vuoren huippu näkyi laivasta suoraan etelässä 15°:n korkeudella. Kun laiva oli purjehtinut 4,00 km kompassisuuntaan 110°, huippu näkyi suoraan lounaassa. Kuinka korkea vuori on? Kompassisuunnat ilmaistaan kulmina pohjoisesta myötäpäivään.

181. Vaeltaja seisoo tunturin rinteellä 71 metriä peilityynen tunturijärven pinnan yläpuolella. Ylhäällä taivaalla hän näkee pienen poutapilven 53° silmäntason yläpuolella ja alhaalla järven pinnassa pilven peilikuvan 58° silmäntason alapuolella. Kuinka korkealla järven pinnan yläpuolella pilvi on? Kun valonsäde heijastuu vedenpinnasta, se jättää pinnan samassa kulmassa, jossa se kohtaa pinnan.

182. Suomi on maailmassa edelläkävijä kartoituksen ja maanmittauksen tarkkuudessa. Tarkat mittaukset mahdollisti ainutlaatuinen koko maan peittävä kolmiomittausverkko. Mittausjärjestelmän pohjana on yksi hyvin tarkasti mitattu etäisyys, ns. perusviiva, joka sijaitsee Vihdissä Nummelanharjulla. Perusviivan pituus on 864,1223 m. Sen päistä alkoi harjulta harjulle ulottuva kolmiomittaustornien määrittämä kolmioverkko. Jokaisen tornin huipulta oli suora näköyhteys kaikkiin muihin saman kolmion kärkinä oleviin torneihin. Torneista mitattiin kolmioiden kulmat tarkalla kulmanmittauslaitteella, ns. teodoliitilla. Tämän jälkeen voitiin laskea minkä tahansa kahden tornin välinen etäisyys. Kuviossa AB on perusviiva. Laske etäisyys CD metrin tarkkuudella.



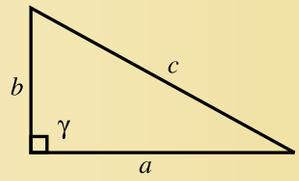
183. Kolmiossa ABC kulman A suuruus on α, sivun AB pituus on a ja sivun BC pituus on b. Tutki, millä b:n arvoilla nämä ehdot täyttäviä kolmioita on kaksi, yksi tai ei yhtään, kun kulma α on a) terävä b) tylppä.

184. Todista sinilauseen avulla seuraava lause: Kolmion kahden sivun pituuksien suhde on yhtä suuri kuin näiden sivujen vastaisten kulmien sinien suhde.

185. Käytä hyväksi edellisessä tehtävässä todistettua lausetta ja todista kolmion kulmanpuolittajalause: Kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun osiin, joiden suhde on yhtä suuri kuin kulman viereisten sivujen suhde. Kulmanpuolittajalauseen todistaminen yhdenmuotoisten kolmioiden avulla oli aikaisemmin tehtävänä 62.

Kosinilauseke

Jos kolmion sivujen a ja b välinen kulma γ on suorakulma, niin kolmannen sivun c pituuden neliö on Pythagoraan lauseen mukaan sivujen a ja b pituuksien neliöiden summa:



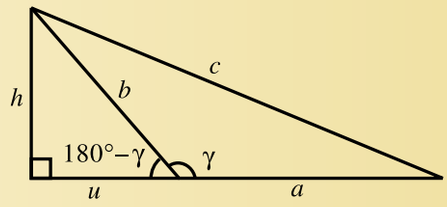
$c^2 = a^2 + b^2$.

Seuraavaksi johdettava kosinilause on Pythagoraan lauseen yleistys tilanteeseen, jossa sivujen a ja b välinen kulma γ ei ole suora. Kolmannen sivun c neliölle saadaan lauseke, jossa sivujen a ja b neliöiden summan lisäksi on kolmas termi. Kosinilause johdetaan tapauksessa: Kulma γ on tylppä. Lauseen johtaminen, kun kulma γ on terävä, on tehtävänä 205.

Kosinilauseen johto

Oletetaan, että kulma γ on tylppä.

Piirretään korkeusjana sivun a jatkeelle. Kuvioon muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota. Korkeuden neliö h^2 voidaan ilmaista Pythagoraan lauseen avulla kahdella eri tavalla.



Isompi kolmio: $h^2 = c^2 - (a + u)^2$.

Pienempi kolmio: $h^2 = b^2 - u^2$.

Merkitään korkeuden neliölle saadut lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä c^2.

$$c^2 - (a + u)^2 = b^2 - u^2$$

$$c^2 = (a + u)^2 + b^2 - u^2$$

$$c^2 = a^2 + 2au + u^2 + b^2 - u^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2au$$

u voidaan ilmaista b:n ja kulman γ kosinin avulla:

$$\cos(180° - \gamma) = \frac{u}{b} \qquad | \cdot b$$

$$u = b\cos(180° - \gamma)$$

Kosinin symmetrialause:
$\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$.

$$u = -b\cos\gamma$$

Sijoitetaan u:n lauseke yhtälöön $c^2 = a^2 + b^2 + 2au$.

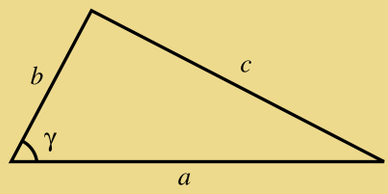
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a(-b\cos\gamma)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Saatu kaava on kosinilause.

Kosinilause

Jos a ja b ovat kolmion kaksi sivua, γ niiden välinen kulma sekä c kolmion kolmas (kulman γ vastainen) sivu, niin



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Siis kolmion sivun pituuden neliö on kahden muun sivun pituuksien neliöiden summa vähennettynä näiden sivujen pituuksien ja niiden välisen kulman kosinin kaksinkertaisella tulolla.

Kosinilause sisältää erikoistapauksenaan Pythagoraan lauseen. Jos nimittäin kulma γ on suorakulma, niin $\cos\gamma = 0$, ja kosinilause saa muodon $c^2 = a^2 + b^2$.

Toisaalta, jos kolmion sivut a, b ja c toteuttavat yhtälön $c^2 = a^2 + b^2$, niin kosinilauseen nojalla on $2ab\cos\gamma = 0$, missä γ on sivujen a ja b välinen kulma. Koska $a \neq 0$ ja $b \neq 0$, niin $\cos\gamma = 0$, joten kulma γ on suorakulma. Siis pätee:

Pythagoraan lauseen käänteislause

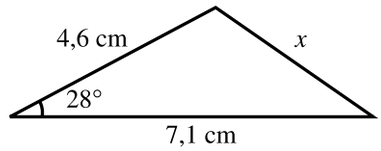
Jos kolmion sivut a, b ja c toteuttavat yhtälön $c^2 = a^2 + b^2$, niin sivujen a ja b välinen kolmion kulma on suorakulma.

ESIMERKKI 1

Kolmion kahden sivun pituudet ovat 7,1 cm ja 4,6 cm. Näiden sivujen välisen kulman suuruus on 28°. Laske kolmion kolmannen sivun pituus.

Ratkaisu

Kun tunnetaan kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma, kolmas sivu saadaan kosinilauseella.



$x^2 = 7{,}1^2 + 4{,}6^2 - 2 \cdot 7{,}1 \cdot 4{,}6 \cdot \cos 28°$

Lasketaan oikean puolen arvo ($x^2 \approx 13{,}896$) ja otetaan neliöjuuri.

$x \approx 3{,}7$ (cm)

Vastaus

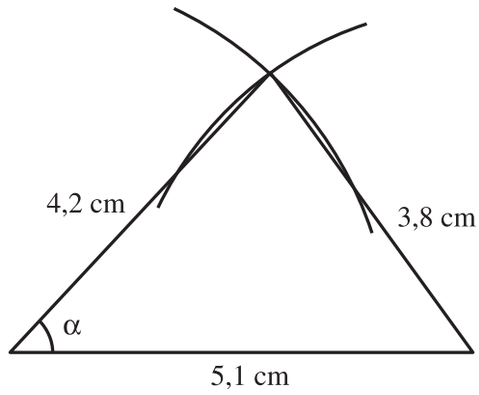
3,7 cm

ESIMERKKI 2

Kolmion sivujen pituudet ovat 3,8 cm, 4,2 cm ja 5,1 cm. Piirrä kolmio. Kuinka suuri kolmion pienin kulma on?

Ratkaisu

Kolmio, jonka kaikki sivut tunnetaan, piirretään niin, että ensin piirretään yksi sivu oikeanmittaisena tai sopivassa mittakaavassa. Sivun päihin piirretään ympyränkaaret, joiden säteinä on kahden muun sivun pituus. Kolmion kolmas kärki on kaarien leikkauspisteessä.



Kolmion pienin kulma on lyhimmän 3,8 cm:n sivun vastainen kulma.*

Kosinilauseesta saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista $\cos\alpha$ ja edelleen kulma α.

$$3{,}8^2 = 4{,}2^2 + 5{,}1^2 - 2 \cdot 4{,}2 \cdot 5{,}1 \cdot \cos\alpha \quad \text{Ratkaistaan } \cos\alpha$$

$$2 \cdot 4{,}2 \cdot 5{,}1 \cdot \cos\alpha = 4{,}2^2 + 5{,}1^2 - 3{,}8^2$$

$$\cos\alpha = \frac{4{,}2^2 + 5{,}1^2 - 3{,}8^2}{2 \cdot 4{,}2 \cdot 5{,}1} \quad (\approx 0{,}682)$$

$$\alpha \approx 47°$$

Muotoa $\cos\alpha = a$ olevalla yhtälöllä on vain yksi ratkaisu välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Vastaus

47°

---

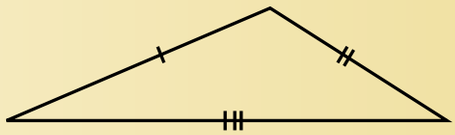
* Kolmion pienin kulma on aina lyhimmän sivun vastainen kulma ja vastaavasti suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma.

Kolmion osien ratkaiseminen kosinilauseen avulla

Kosinilauseen avulla voidaan ratkaista kolmion muut osat (kulmat ja sivut) seuraavissa tapauksissa.

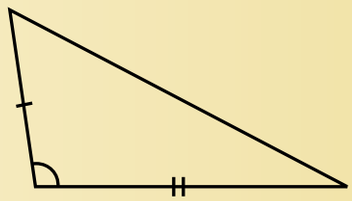
• Kolmiosta tunnetaan *kaikki sivut*.

Kulmat saadaan kosinilauseella esimerkin 2 tapaan.



• Kolmiosta tunnetaan *kaksi sivua ja niiden välinen kulma.*

Kolmas sivu saadaan kosinilauseella esimerkin 1 tapaan ja kulmat edelleen kosinilauseella.



ESIMERKKI 3

Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 3 ja $\sqrt{5}$. Osoita, että kolmio on suorakulmainen. Minkä kahden sivun välinen kulma on suorakulma?

Ratkaisu

Lasketaan sivujen pituuksien neliöt.

$2^2 = 4$, $3^2 = 9$ ja $(\sqrt{5})^2 = 5$

Koska $2^2 + (\sqrt{5})^2 = 3^2$, kolmio on suorakulmainen. Suorakulma on pituudeltaan 2 ja $\sqrt{5}$ olevien sivujen välissä.

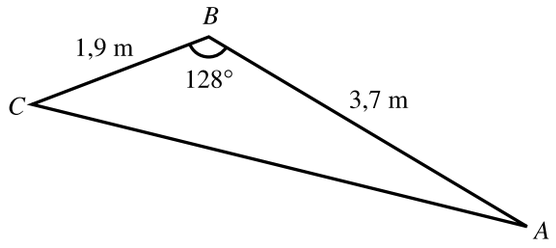
Vastaus

Suorakulma on pituudeltaan 2 ja $\sqrt{5}$ olevien sivujen välinen kulma.

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

186. Laske sivun AC pituus.



187. Satamasta lähtenyt laiva on purjehtinut ensin 17 kilometriä länteen ja sitten 26 kilometriä lounaaseen. Kuinka kaukana laiva on satamasta?

188. Kolmion sivujen pituudet ovat 3,5 cm, 5,6 cm ja 7,8 cm. Piirrä kolmio. Kuinka suuri kolmion suurin kulma on?

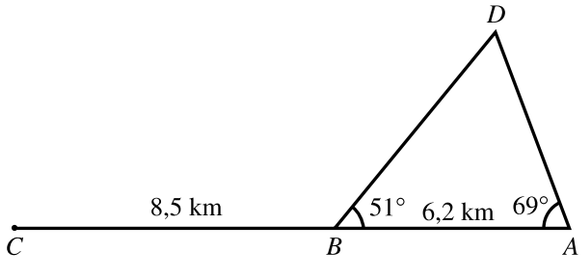
189. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 3 ja kannan pituus 4. Määritä
a) huippukulman kosinin tarkka arvo
b) huippukulman suuruuden likiarvo asteen sadasosien tarkkuudella.

190. Osoita, että kolmio, jonka sivujen pituudet ovat a) $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ ja 5 b) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ ja 3 on suorakulmainen. Minkä mittaisten sivujen välinen kulma on suorakulma?

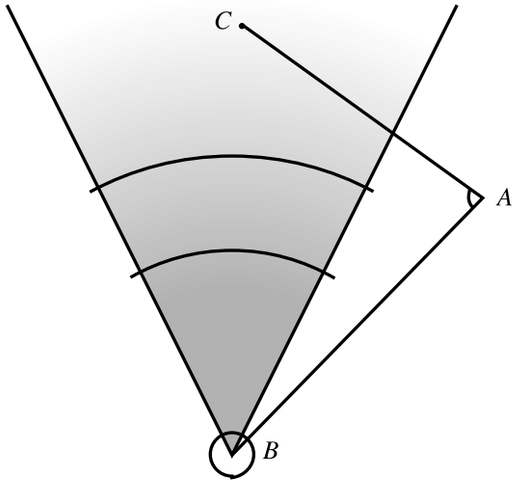
191. Rinne viettää tasaisesti 12°:n kulmassa. Myrsky taittoi rinteessä kasvavan puun 5,0 metrin korkeudelta, ja latvaosa kaatui ylärinteeseen irtoamatta tyviosasta. Latva osui maahan 8,0 metrin päässä tyvestä. Laske puun korkeus.

192. Kolmion muotoisen metsäpalstan sivujen pituudet ovat 1,8 km, 2,1 km ja 3,0 km. Kuinka suuri palstan pinta-ala on?

193. Mitattuaan paikoissa A ja B kuvioon merkityt kulmat laiva jatkoi suuntaansa muuttamatta paikkaan C. Kuinka pitkä etäisyys CD on?



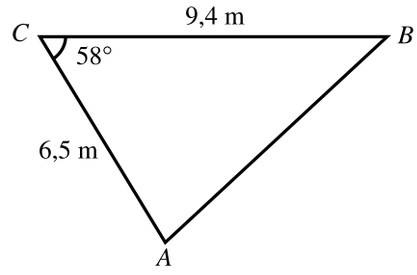
194. Kuulantyönnön pituus mitataan optisesti työntösektorin ulkopuolelta. Paikassa A sijaitseva laite mittaa etäisyyden putoamispaikkaan C sekä kulman CAB, missä B on ympyrän muotoisen kuulantyöntörenkaan (ns. kuulaympyrän) keskipiste. Tiedot syötetään tietokoneeseen, joka laskee heiton pituuden. Jos mittalaitteen etäisyys kuulaympyrän keskipisteestä on 16,00 m, niin kuinka pitkä oli työntö, josta saatiin seuraavat mittaustulokset: $AC = 13{,}17$ m ja $\sphericalangle CAB = 81{,}13°$? Kuulaympyrän halkaisija on 2,134 m (7 jalkaa).



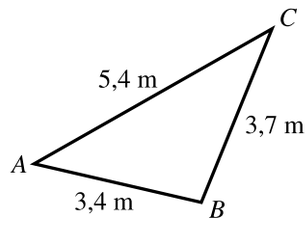
SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

195. Laske kolmion ABC muiden osien (sivujen ja kulmien) suuruudet, kun

a) kolmiosta ABC tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma

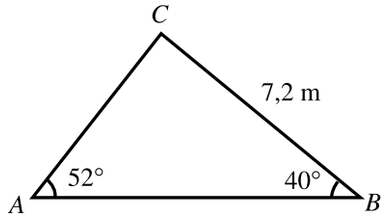


b) kolmiosta ABC tunnetaan kaikki sivut.

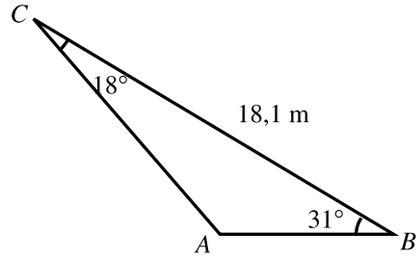


196. Laske kolmion ABC muiden osien suuruudet, kun

a) kolmiosta ABC tunnetaan kaksi kulmaa ja näistä toisen vastainen sivu



b) kolmiosta ABC tunnetaan kaksi kulmaa ja näiden kulmien välinen sivu.



197. Hotelliesitteen mukaan lentokenttä on hotellista 12 km kaakkoon ja kaupungin keskusta hotellista 28 km etelään. Laske näiden tietojen avulla lentokentän etäisyys keskustasta.

198. Rautatanko, jonka pituus on 6,7 metriä, taivutetaan 2,3 metrin etäisyydeltä tangon päästä. Kuinka suuri taivutusosien välisen kulman tulee olla, jotta tangon päiden etäisyys olisi 3,4 metriä?

199. Onko kolmio, jonka sivujen pituudet ovat

a) 5, 6 ja $\sqrt{11}$

b) $2\sqrt{a}$, $a-1$ ja $a+1$ $(a > 1)$

suorakulmainen? Jos kolmio on suorakulmainen, niin mikä sivu on kolmion hypotenuusa?

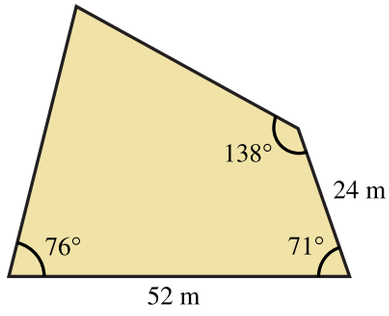
200. Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 5,6 cm ja 8,5 cm. Suunnikkaan pienempien kulmien suuruus on 52°. Kuinka pitkät suunnikkaan lävistäjät ovat?

201. Talojen A ja B etäisyys on 2,3 km. Talojen yhteinen hiekkakuoppa kaivetaan paikkaan, jonka etäisyys talosta A on 1,8 km ja talosta B 2,1 km. Kuinka suuri on hiekkakuopan etäisyys taloja yhdistävästä suorasta maantiestä?

202. Purjehdusretkellä purjehdittiin ensin 7,8 km kompassisuuntaan 235° ja sitten 8,9 km kompassisuuntaan 169°. Kuinka kauas lähtöpaikasta päädyttiin? Millä kompassisuunnalla päästään suoraan takaisin lähtöpaikkaan? Kompassisuunta ilmaistaan kulmana pohjoisesta myötäpäivään.

203. Nelikulmion muotoisen pellon sivujen pituudet ovat kiertojärjestyksessä 110 m, 240 m, 280 m ja 320 m. Kahden ensin mainitun sivun välinen pellon puoleinen kulma on 102°. Kuinka suuri pellon pinta-ala on? Anna vastaus hehtaareina.

204. Laske tontin pinta-ala.



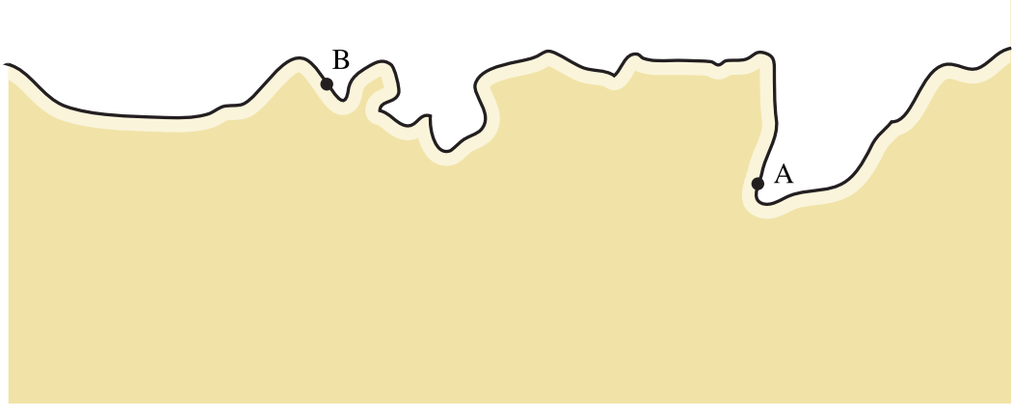
205. Johda kosinilause tapauksessa: Sivujen a ja b välinen kulma γ on terävä.

206. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 40 cm ja 80 cm sekä lävistäjien pituudet 120 cm ja 60 cm. Kuinka suuri puolisuunnikkaan pinta-ala on?

Ympyrä

Ongelma

Merihätään joutunut alus ilmoittaa olevansa 30 km:n etäisyydellä merivartioasemasta A ja 50 km:n etäisyydellä asemasta B. Määritä aluksen sijainti alla olevalla kartalla, jonka mittakaava on 1 : 1 000 000.

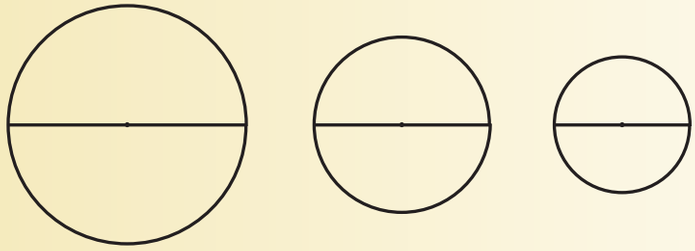


Ympyrä

Ympyrä muodostuu niistä tason pisteistä, jotka ovat samalla etäisyydellä (*säde*) kiinteästä pisteestä (*keskipiste*).

Jänne on ympyrän kahden pisteen välinen jana.
Halkaisija on keskipisteen kautta kulkeva jänne.

Luku π



Kaikki ympyrät ovat keskenään yhdenmuotoiset, joten ympyrän kehän pituuden suhde ympyrän halkaisijan pituuteen ei riipu ympyrän koosta. Suhde on yksi tärkeimmistä matemaattisista vakioista. Suhdetta merkitään kreikkalaisella kirjaimella π (pii).

$$\pi = \frac{\text{ympyrän kehän pituus}}{\text{halkaisijan pituus}}$$

Luku π on irrationaaliluku, jonka kaksidesimaalinen likiarvo on 3,14.*

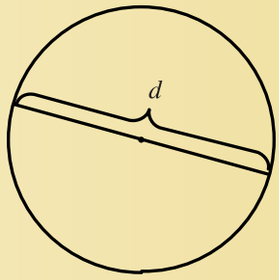
---

* Luku π on 70 desimaalin tarkkuudella
3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781 6.
Vanhan testamentin Kuningasten kirjassa (1. Kun. 7:23) π on 3: ”Hiram valoi myös pyöreän altaan, jota kutsuttiin mereksi. Se oli reunasta reunaan kymmenen kyynärän levyinen, korkeutta sillä oli viisi kyynärää, ja vasta kolmenkymmenen kyynärän pituinen mittanuora ulottui sen ympäri.”
Noin 2000 vuotta ennen ajanlaskumme alkua babylonialaiset otaksuivat, että π on joko 3 tai $3\frac{1}{8}$. Kreikkalainen Ptolemaios käytti π:n arvoa $\frac{377}{120}$. Kiinalainen Tsu Tšung-tših löysi 400-luvulla π:lle arvon $\frac{355}{113}$, jota parempi murtolukuarvio on vasta $\frac{103\,993}{33\,102}$. Luku π todistettiin irrationaaliluvuksi 1700-luvun lopulla.
Hollantilainen Ludolf van Ceulen sai koko elinaikanaan (1539–1610) lasketuksi π:n 35 ensimmäistä desimaalia. Vuonna 2002 japanilaiset Kanada, Ushio ja Kuroda laskivat 1 241 100 000 000 ensimmäistä desimaalia. Tietokoneajo supertietokoneella kesti yli 600 tuntia.

Ympyrän kehän pituuden laskukaava seuraa suoraan luvun π määritelmästä:

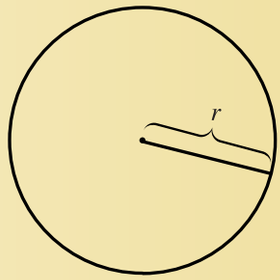
Ympyrän kehän pituus

Ympyrän kehän pituus on halkaisijan pituus kerrottuna luvulla π.



$$p = \pi d$$

Tai toisin sanottuna: säde kerrottuna kahdella ja luvulla π.



$$p = 2\pi r$$

Ympyrän pinta-ala

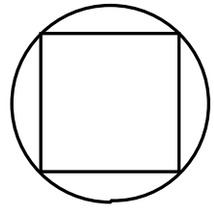
Ympyrän rajaaman alueen pinta-alaa on tapana kutsua ympyrän pinta-alaksi. Ympyrän pinta-ala on säteen neliö kerrottuna luvulla π.

$$A = \pi r^2$$

Ympyrän pinta-alan kaava perustellaan tehtävässä 232.

ESIMERKKI 1

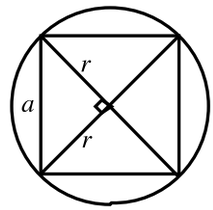
Ympyrän sisään on piirretty neliö. Laske
a) neliön piirin suhde ympyrän kehän pituuteen
b) neliön pinta-alan suhde ympyrän pinta-alaan.
Ilmoita suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin kymmenesosan tarkkuudella.



Ratkaisu

Ympyrän sädettä ei tiedetä, joten merkitään sitä kirjaimella r. *

Neliön lävistäjinä on kaksi kohtisuorasti leikkaavaa ympyrän halkaisijaa. Ilmaistaan neliön sivu a säteen r avulla.

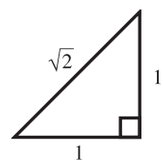


$$a^2 = r^2 + r^2$$

$$a^2 = 2r^2$$

$$a = \sqrt{2}\,r$$

Voidaan myös käyttää muistikolmiota (katso tehtävä 117).



a) Lasketaan neliön piirin suhde ympyrän kehän pituuteen.

$$\frac{p_N}{p_Y} = \frac{4a}{2\pi r} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}r}{2\pi r} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0{,}900 = 90{,}0\ \%$$

b) Lasketaan pinta-alojen suhde.

$$\frac{A_N}{A_Y} = \frac{a^2}{\pi r^2} = \frac{(\sqrt{2}r)^2}{\pi r^2} = \frac{(\sqrt{2})^2 \cdot r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637 = 63{,}7\ \%$$

Vastaus

a) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 90{,}0\ \%$ b) $\frac{2}{\pi} \approx 63{,}7\ \%$

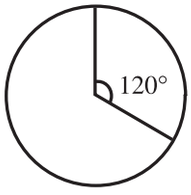
---

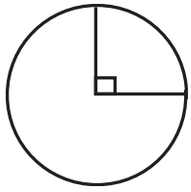
* Kysytyt suhteet eivät ilmeisestikään riipu ympyrän koosta, joten suhteita laskettaessa kirjain r supistuu pois. Jos r ei supistu, niin laskuissa on tehty virhe.

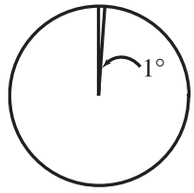
Ongelma 2

Ympyrään on piirretty 120°:n, 90°:n ja 1°:n suuruiset keskuskulmat. Mikä osa ympyrän kehän pituudesta ja mikä osa ympyrän pinta-alasta on

a) 120°:n keskuskulman rajaaman kaaren pituus ja sektorin pinta-ala
b) 90°:n keskuskulman rajaaman kaaren pituus ja sektorin pinta-ala
c) 1°:n keskuskulman rajaaman kaaren pituus sektorin pinta-ala?



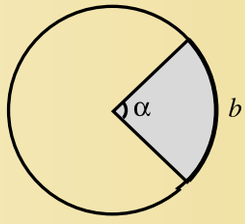




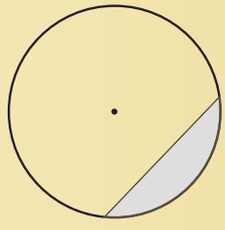
Kaari ja sektori

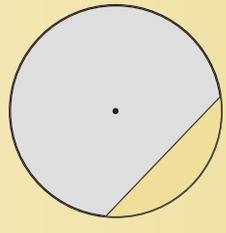
Kulma, jonka kärki on ympyrän keskipisteessä, on *keskuskulma*.

Keskuskulman kyljet rajaavat ympyrältä *kaaren* ja ympyrän sisältä *sektorin*.



Kaari ja sen päätepisteitä yhdistävä jänne rajaavat ympyrän *segmentin.*





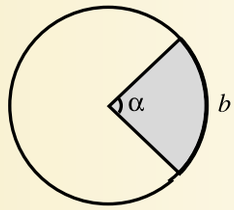
Kaaren pituus

Jos keskuskulma on puolet, kolmasosa jne. 360°:sta, niin vastaavan kaaren pituus on puolet, kolmasosa jne. ympyrän kehän pituudesta. Yleisesti pätee:

$$\frac{b}{p} = \frac{\alpha}{360°}$$

Ympyrän kaaren pituuden suhde ympyrän kehän pituuteen on yhtä suuri kuin kaaren keskuskulman suhde täysikulmaan 360°.

b = kaaren pituus
α = kaarta vastaava keskuskulma
p = ympyrän kehän pituus



Kun verranto kerrotaan kehän pituudella p ja sijoitetaan $p = 2\pi r$, missä r on ympyrän säde, saadaan kaava:

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

Ympyrän kehän pituus kerrotaan suhteella $\frac{\alpha}{360°}$.

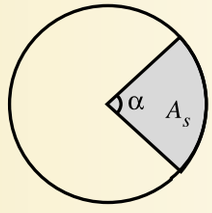
Sektorin pinta-ala

Jos keskuskulma on puolet, kolmasosa jne. 360°:sta, niin vastaavan sektorin pinta-ala on puolet, kolmasosa jne. ympyrän pinta-alasta. Yleisesti pätee:

$$\frac{A_S}{A} = \frac{\alpha}{360°}$$

Sektorin pinta-alan suhde koko ympyrän pinta-alaan on yhtä suuri kuin sektorin keskuskulman suhde täysikulmaan 360°.

A_S = sektorin pinta-ala
A = ympyrän pinta-ala
α = sektorin keskuskulma



Kun verranto kerrotaan ympyrän pinta-alalla A ja sijoitetaan $A = \pi r^2$, missä r on ympyrän säde, saadaan kaava:

$$A_S = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

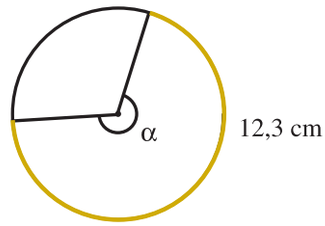
Ympyrän pinta-ala kerrotaan suhteella $\frac{\alpha}{360°}$.

ESIMERKKI 2

Ympyrään, jonka kehän pituus on 17,8 cm, on piirretty 12,3 cm:n pituinen kaari. Kuinka suuri kaaren keskuskulma on?

Ratkaisu

Kaaren pituuden suhde ympyrän kehän pituuteen on yhtä suuri kuin vastaavan keskuskulman suhde täysikulmaan 360°.



$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{12{,}3}{17{,}8} \qquad \mid \cdot 360°$$

Voidaan myös kertoa ristiin.

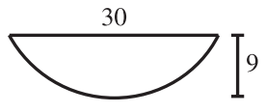
$$\alpha = \frac{12{,}3}{17{,}8} \cdot 360° \approx 249°$$

Vastaus

249°

ESIMERKKI 3

Ympyrästä on erotettu segmentti, jota rajaavan jänteen pituus on 30 ja jonka korkeus on 9.

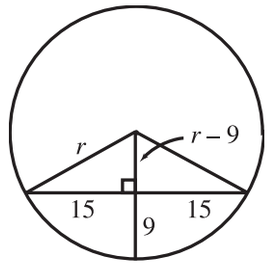


a) Määritä ympyrän säde.

b) Laske segmentin pinta-alan likiarvo neljän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu

a) Täydennetään kuvioon koko ympyrä ja piirretään säteet jänteen päätepisteisiin sekä jännettä vastaan kohtisuora. Säde puolittaa tasakylkisen kolmion kannan.



Säde r ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$r^2 = (r-9)^2 + 15^2$$

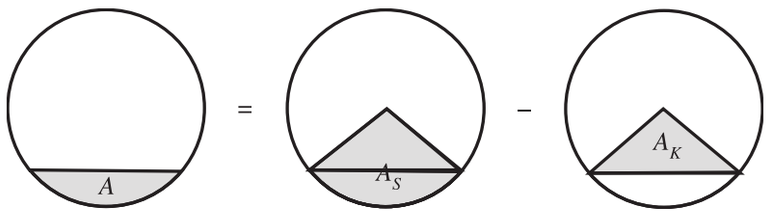
$$r^2 = r^2 - 18r + 81 + 225$$

$$18r = 306 \qquad | : 18$$

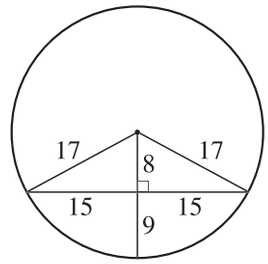
$$r = 17$$

Siis ympyrän säde on 17.

b) Segmentin pinta-ala saadaan, kun sektorin pinta-alasta vähennetään säteiden ja jänteen rajaaman tasakylkisen kolmion pinta-ala.

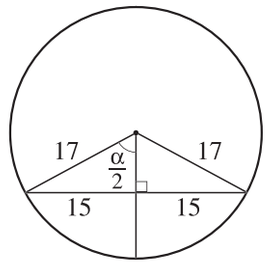


Tasakylkisen kolmion kanta on 30 ja korkeus $17 - 9 = 8$, joten kolmion pinta-ala on



$$A_K = \frac{30 \cdot 8}{2} = 120.$$

Sektorin keskuskulman α puolikas $\frac{\alpha}{2}$ ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{17}$$

$$\frac{\alpha}{2} \approx 61{,}9275° \qquad \big| \cdot 2$$

$$\alpha \approx 123{,}855°$$

Sektorin pinta-ala on

$$A_S = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 \approx \frac{123{,}855°}{360°} \cdot \pi \cdot 17^2 \approx 312{,}36.$$

Segmentin pinta-ala on

$$A = A_S - A_K \approx 312{,}36 - 120 \approx 192{,}4.$$

Vastaus a) 17 b) 192,4

TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

207. Ympyrän muotoinen uima-allas, jonka halkaisija on 12,0 m, on ympäröity 2,0 m leveällä laatoituksella. Laske laatoitetun alueen pinta-ala.

208. a) Kuinka suuri on 120 m pitkällä aidalla aidatun ympyrän muotoisen alueen pinta-ala?
b) Kuinka pitkä aita tarvitaan 2 300 m^2:n suuruisen ympyrän muotoisen alueen rajaamiseen?

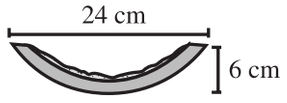
209. Neliön sisään on piirretty ympyrä, joka sivuaa neliön kaikkia sivuja. Määritä
a) ympyrän kehän pituuden suhde neliön piiriin
b) ympyrän pinta-alan suhde neliön pinta-alaan.
Ilmoita suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin tarkkuudella.

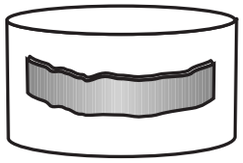
210. Ympyrän säde on 12,8 cm.
a) Laske 115°:n suuruisen keskuskulman rajaaman kaaren pituus.
b) Kuinka suuri on 12,8 cm:n pituisen kaaren keskuskulma?

211. Helsingin ja Las Palmasin etäisyys on 4 650 km. Kuinka paljon lyhyempi olisi kaupunkeja yhdistävä suora tunneli? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

212. Ympyrän säde on 4,5 m. Laske ympyrän sen segmentin pinta-ala, jota rajoittavat 78°:n keskuskulman rajaama kaari ja kaaren päätepisteitä yhdistävä jänne.

213. Arkeologisissa kaivauksissa löydettiin sirpale. Sirpaleen uskottiin olevan peräisin ruukusta, jonka pohjan suuntaiset poikkileikkaukset ovat ympyröitä. Mikä on ollut ehjän ruukun ulkoläpimitta?

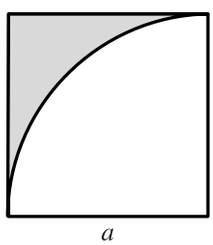




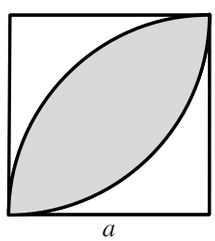
214. Yhden euron kolikon halkaisija on 23,25 mm. Neljä yhden euron kolikkoa sivuaa toisiaan niin, että rahojen keskipisteet muodostavat neliön. Kuinka suuri tyhjä tila jää kolikkojen keskelle?

215. Kaaret on piirretty neliön kärki keskipisteenä ja neliön sivu a säteenä. Ilmaise varjostetun alueen pinta-ala neliön sivun a lausekkeena ja määritä pinta-alan suhde neliön pinta-alaan.

a)



b)

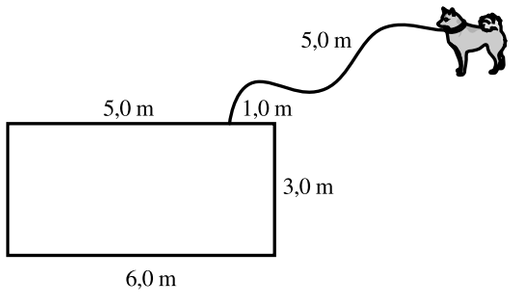


216. Huoneen lattiaa rajaavat neliön kolme sivua ja neliön ulkopuolelle neljäs sivu halkaisijana piirretty puoliympyrä. Määritä desimetrin tarkkuudella neliön sivun pituus, kun
a) huoneen ympärysmitta on 72 m
b) huoneen lattiapinta-ala on 450 m^2.

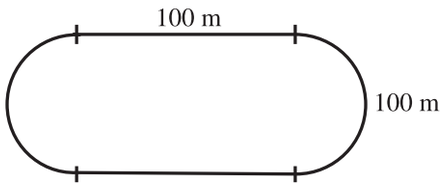
217. Egyptiläisessä Rhind-papyruksessa ajalta 1500 eKr. annetaan ympyrän pinta-alan laskemiseksi seuraava ohje: Ympyrän pinta-ala on yhtä suuri kuin sellaisen neliön pinta-ala, jonka sivu on kahdeksan yhdeksäsosaa ympyrän halkaisijasta. Kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan ohjeen mukaisesti laskettu pinta-ala poikkeaa ympyrän oikeasta pinta-alasta?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

218. Kuinka suurella alueella vajan seinään kytketty koira voi jaloitella?



219. Urheilukentän kaarteet ovat puoliympyröitä. Laske urheilukentän pinta-ala.



220. Kaupunkia kiertävät kaksi kehätietä ovat muodoltaan samankeskisiä ympyröitä. Teiden etäisyys toisistaan on 10 km. Kuinka paljon ulompi kehätie on sisempää kehätietä pitempi, jos sisemmän säde on

a) 12 km b) 35 km c) a km?

221. Puoliympyrään piirretään neliö, jonka yksi sivu on ympyrän halkaisijalla ja kaksi kärkeä puoliympyrän kaarella.

a) Mikä on neliön sivun pituus, jos puoliympyrän säde on r?

b) Laske neliön pinta-alan suhde puoliympyrän pinta-alaan. Ilmoita suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

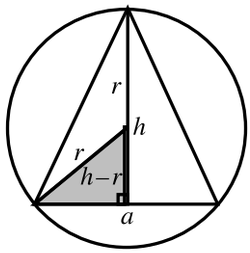
222. Kaaren asteluku on 132° ja kaaren päätepisteitä yhdistävän jänteen pituus 218 cm. Kuinka pitkä kaari on?

223. Suomenlahden 120 km leveän kohdan poikki rakennetaan täysin suora tunneli, jonka molemmat päät ovat aivan vesirajassa. Kuinka syvällä vedenpinnan alla tunnelin keskikohta on? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

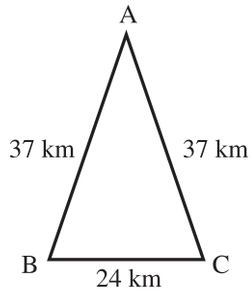
224. Ympyrän säde on 7,3 cm. Ympyrään on piirretty segmentti, jonka rajaavat ympyrän 12,5 cm pitkä kaari ja kaaren päätepisteitä yhdistävä jänne. Laske segmentin pinta-ala.

225. Tasaiselle pehmeälle hiekalle pudonnut pallo jätti maahan kuopan, jonka halkaisija oli 23 cm ja syvyys 6,5 cm. Kuinka suuri pallon säde oli? (Ohje: Piirrä sivukuva.)

226. Teräväkulmaisen tasakylkisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän (kolmion kaikkien kärkien kautta kulkevan ympyrän) säde r voidaan määrittää niin, että muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö kuvion suorakulmaisesta kolmiosta. Kuviossa a on tasakylkisen kolmion kanta ja h korkeus.
Laske ympyrän säde, kun kolmion
a) kannan pituus on 4 ja kannalle piirretty korkeus on 6
b) kyljen pituus on 17 ja kannan pituus on 16.



227. Taajaman A etäisyys molemmista taajamista B ja C on 37 kilometriä. Taajamien B ja C etäisyys on 24 km. Taajamien yhteisen paikallisradion lähetysantenni suunnitellaan rakennettavaksi paikkaan, joka on yhtä etäällä jokaisesta taajamasta. Käytä hyväksi edellistä tehtävää ja määritä lähetysantennin paikka.



228. Ympyrän segmentin korkeus on kolmasosa ympyrän halkaisijasta. Laske prosentin kymmenesosien tarkkuudella, kuinka monta prosenttia segmentin pinta-ala on ympyrän pinta-alasta.

229. Neliön muotoisen laitumen sivun pituus on 32 m. Laitumen kahteen vierekkäiseen nurkkaan on kytketty lampaat yhtä pitkillä köysillä. Molemmat lampaat ylettyvät juuri neliön keskipisteeseen. Kuinka suurelta alalta lampaat syövät laitumen ruohon?

230. Aurinko ja Kuu näkyvät Maahan yhtä suurina ympyröinä. Auringonpimennyksessä Kuu peittää Auringon niin, että Kuun reuna kulkee auringon keskipisteen kautta. Kuinka monta prosenttia Auringosta näyttää olevan peittyneenä? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

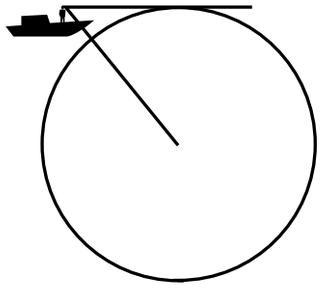
231. Ympyrän kehän pisteen P kautta on piirretty suora, joka muodostaa pisteeseen P piirretyn säteen kanssa $26°$:n kulman. Suoralla on piste, jonka etäisyys pisteestä P on $8{,}0$ cm ja ympyrän keskipisteestä $5{,}0$ cm. Määritä ympyrän säde ja ympyrän suorasta erottaman jänteen pituus.

232. Tässä tehtävässä perustellaan ympyrän pinta-alan kaava. Kaavan johtamisessa käytetään hyväksi luvun π määritelmää (luku π on ympyrän kehän pituuden suhde ympyrän halkaisijan pituuteen) ja seuraavaa havaintoa: Kun ympyrän sisään piirretyn säännöllisen monikulmion sivujen lukumäärä kasvaa, monikulmion piiri lähenee ympyrän kehän pituutta ja monikulmion pinta-ala lähenee ympyrän pinta-alaa.
a) Ympyrän halkaisija on 1. Muodosta suorakulmaisen kolmion trigonometrialla lauseke ympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion piirille. Mitä lukua lausekkeen arvot lähenevät, kun n kasvaa? Miksi?
b) Ympyrän säde on 1. Muodosta kolmion pinta-alan trigonometrisella kaavalla lauseke ympyrän sisään piirretyn säännöllisen $2n$-kulmion pinta-alalle. Vertaa lauseketta a-kohdassa muodostettuun. Mitä lukua lausekkeen arvot lähenevät, kun n kasvaa? Mikä on 1-säteisen ympyrän pinta-ala?
c) Kuinka suuri on r-säteisen ympyrän pinta-ala?

Ympyrän tangentti

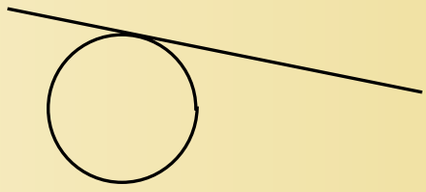
Ongelma

Kuinka kauas merelle voi nähdä veneen kannella seisova henkilö, jonka silmät ovat 2,80 metrin korkeudella veden pinnasta? Maapallon säde on 6 370 km.



Ympyrän tangentti

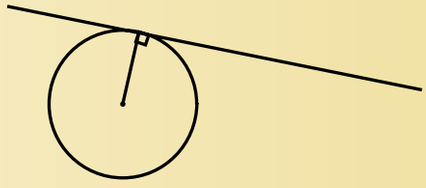
Suora, joka kohtaa ympyrän vain yhdessä pisteessä, on ympyrän *tangentti*.



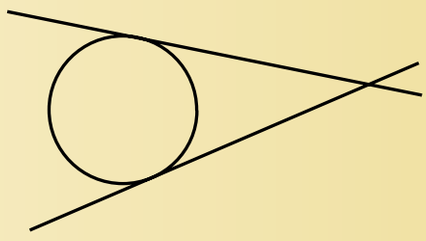
Ympyrän tangentti on siis suora, joka *sivuaa* ympyrää.

Ympyrän tangentin ominaisuuksia

Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Tangentin etäisyys keskipisteestä on säteen suuruinen.



Ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voidaan ympyrälle piirtää kaksi tangenttia.

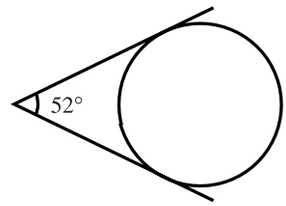


ESIMERKKI 1

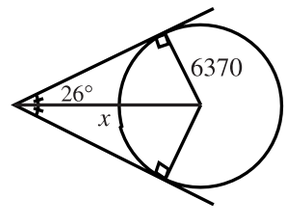
Maapallo näkyy miehitetystä avaruusaluksesta $52°$:n kulmassa. Mikä on avaruusaluksen etäisyys Maasta? Maapallon säde on $6\,370$ km.

Ratkaisu

Kulma, jossa maapallo näkyy, on avaruusaluksesta maapallon poikkileikkausympyrälle piirrettyjen tangenttien välinen kulma. Ympyrän keskipiste on maapallon keskipiste ja säde on maapallon säde.



Kun kuvioon täydennetään ympyrän keskipisteen kautta kulkeva suora ja sivuamispisteisiin piirretyt säteet, muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota. Kuvio on symmetrinen keskipisteen kautta kulkevan suoran suhteen, joten suora puolittaa tangenttien välisen kulman.



Aluksen etäisyys maapallon keskipisteestä ratkaistaan trigonometrian avulla.

$$\sin 26° = \frac{6370}{x} \qquad \big| \cdot x$$

$$x \cdot \sin 26° = 6370 \qquad \big| : \sin 26°$$

$$x = \frac{6370}{\sin\ 26°} \approx 14\,530 \ \text{(km)}$$

Aluksen etäisyys Maasta on $14\,530 - 6\,370 = 8\,160 \approx 8\,200$ (km).

Vastaus

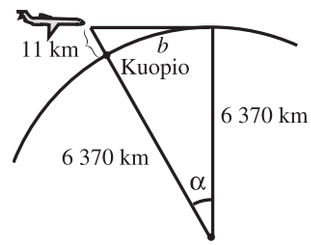
8 200 km

ESIMERKKI 2

Lentokone lentää 11 kilometrin korkeudessa Kuopion yläpuolella. Voidaanko koneen ikkunasta kirkkaalla ilmalla nähdä Suomenlahti? Kuopion lyhin etäisyys Suomenlahdesta on noin 300 km. Maapallon säde on 6 370 km ja ympärysmitta 40 000 km.

Ratkaisu

Lasketaan, kuinka etäällä Kuopiosta on etäisin paikka, joka lentokoneesta voidaan nähdä. Näkökentän etäisimmästä kohdasta saapuvat valonsäteet kulkevat pitkin maapallon poikkileikkausympyrän tangenttia. Etäisyys Kuopiosta on maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus b.* Keskuskulma α ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370 + 11}$$

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6381}$$

$$\alpha \approx 3{,}365°$$

Kaaren pituus on $b = \dfrac{3{,}365°}{360°} \cdot 40\,000 \approx 370$ (km).

Näkökenttä ulottuu 370 kilometrin päähän Kuopiosta ja siis myös Suomenlahdelle 300 kilometrin päähän.

Vastaus

Voidaan nähdä.

---

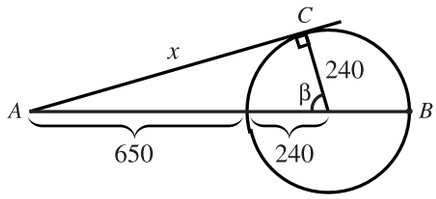
* Kahden paikan etäisyys maanpinnalla on aina paikkojen kautta kulkevan maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus. Lyhyillä matkoilla etäisyys on käytännössä sama kuin viivasuora etäisyys. Tällainen tilanne on esimerkiksi edeltävässä ongelmassa ja tehtävässä 233.

ESIMERKKI 3

Pyöreän lammen halkaisija on 480 m. Paikan A etäisyys lammesta on 650 m, ja paikka B sijaitsee lammen rannalla A:ta vastapäätä. Kuinka pitkä on lyhin kulkutie paikasta A paikkaan B?

Ratkaisu

Lyhin tie A:sta B:hen seuraa aluksi pisteen A kautta piirrettyä ympyrän tangenttia sivuamispisteeseen C ja sen jälkeen ympyrän kaarta CB.



Janan AC pituus saadaan kuvioon täydennetystä suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + 240^2 = 890^2$$
$$x^2 = 890^2 - 240^2$$
$$x \approx 857 \text{ (m)}$$

Kaarta CB vastaava keskuskulma on $180° - \beta$. Kulma β ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos\beta = \frac{240}{890}$$
$$\beta \approx 74{,}4°$$

Kaarta CB vastaava keskuskulma on

$180° - \beta \approx 180° - 74{,}4° = 105{,}6°$.

Kaaren CB pituus on

$$b \approx \frac{105{,}6°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 240 \approx 442 \text{ (m)}.$$

Kulkureitin pituus on $857 + 442 = 1\,299 \approx 1\,300$ (m).

Vastaus

1 300 m

TEHTÄVIÄ

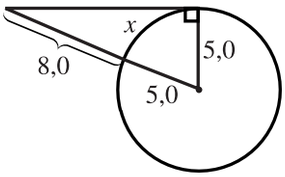
SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

Monissa tehtävissä tarvitaan maapallon ympärysmittaa ja sädettä. Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km ja säde $\frac{40\,000\text{ km}}{2\pi} \approx 6\,370$ km.

233. Kuinka kauas Suomenlahdelle voi nähdä Helsingin olympiastadionin tornista 75 metrin korkeudelta meren pinnasta?

234. Ympyrän säde on 35 cm, ja pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä on 85 cm. Kuinka suuri on pisteestä P ympyrälle piirrettyjen tangenttien välinen kulma?

235. Laske kaaren pituus x.

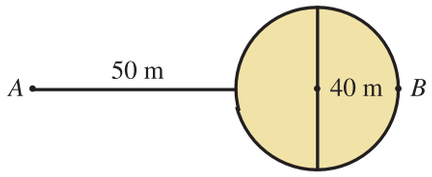


236. Lentokone on Kajaanin yläpuolella 1,7 km:n korkeudella. Voidaanko lentokoneesta kirkkaalla ilmalla nähdä Pohjanlahti? Pohjanlahden lyhin etäisyys Kajaanista on 130 km.

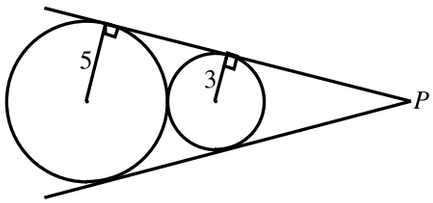
237. Kuu näkyy Maasta 0,52°:n kulmassa.
a) Laske matka Maan pinnalta Kuun pinnalle. Kuun säde on 1 740 km.
b) Tennispallon halkaisija on 6,6 cm. Miltä etäisyydeltä katsottuna tennispallo näkyy Kuun kokoisena?

238. Merenkurkun molemmille puolille paikkoihin, joiden välinen etäisyys on 110 km, päätetään rakentaa merenpinnasta yhtä korkealle nousevat linkkitornit. Kuinka korkeiksi tornit tulee rakentaa, jotta lähetysaallot kulkisivat esteettä tornista toiseen?

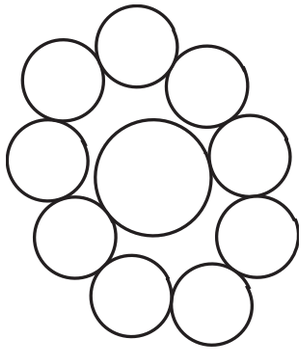
239. Kuinka pitkä on lyhin reitti pisteestä A lammen ympäri pisteeseen B ja takaisin?



240. Ympyrät sivuavat toisiaan, ja niiden kaksi yhteistä tangenttia leikkaavat pisteessä P. Mikä on pisteen P etäisyys pienemmän ympyrän keskipisteestä?



241. Kuinka monta a) r-säteistä b) $2r$-säteistä c) $\frac{r}{2}$-säteistä ympyrää tarvitaan vähintään, jotta niistä muodostetulla ketjulla voitaisiin ympäröidä r-säteinen ympyrä? Jokainen ketjun ympyrä sivuaa kahta viereistä ketjun ympyrää. Ympäröivän ketjun ympyrät saavat sivuta keskellä olevaa r-säteistä ympyrää.



SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

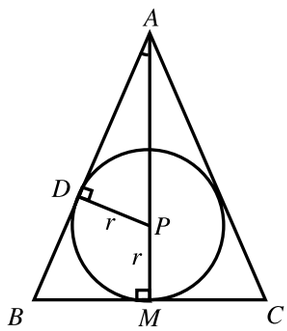
242. Ympyrä, jonka säde on 8,0 cm, näkyy pisteestä P 38°:n kulmassa. Laske pisteen P etäisyys ympyrän kehästä.

243. Manner-Suomen suurin pituus Hangosta Utsjoelle on 1 160 km. Kuinka korkealle pitäisi vähintään nousta Manner-Suomen keskikohdan yläpuolelle, jotta voisi nähdä koko Manner-Suomen?

244. Sojuz-avaruusasema kulkee paikkakunnan yli taivaanlaen kautta 900 km:n korkeudella. Kuinka kauan avaruusasema on horisontin yläpuolella? Avaruusaseman kiertoaika maapallon ympäri on 95 minuuttia. Aseman lentorata oletetaan ympyräksi.

245. Pyöreään torniin, jonka halkaisija on 6,5 m, on liimattu 9,0 m leveä mainos. Miltä etäisyydeltä mainoksen voi nähdä koko leveydeltään?

246. Tasakylkisen kolmion sisään piirretyn ympyrän (kolmion kaikkia sivuja sivuavan ympyrän) säde voidaan laskea käyttämällä hyväksi kolmioiden ABM ja APD yhdenmuotoisuutta.

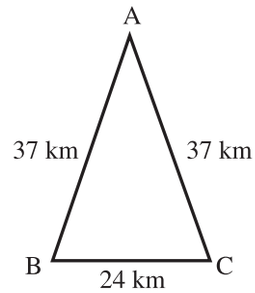


Laske tasakylkisen kolmion sisään piirretyn ympyrän säde, kun

a) kolmion kylki on 13 ja kanta 10

b) kolmion kanta on 14 ja kannalle piirretty korkeus 24.

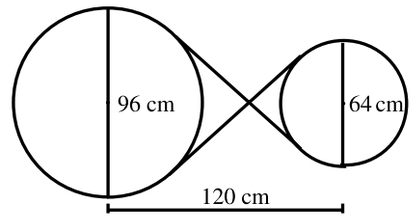
247. Taajaman A etäisyys molemmista taajamista B ja C on 37 kilometriä. Taajamien B ja C etäisyys on 24 kilometriä. Taajamia yhdistävät suorat maantiet. Taajamien yhteinen kaatopaikka suunnitellaan perustettavaksi paikkaan, joka on yhtä etäällä jokaisesta tiestä. Käytä hyväksi edellistä tehtävää ja määritä kaatopaikan paikka.



248. Koristekuvion ympyrä, jonka säde on 10,0 cm, on ympäröity kahdeksalla keskenään samankokoisella ympyrällä, joista jokainen sivuaa kahta viereistä ympyrää ja keskellä olevaa ympyrää. Kuinka suuri on ympäröivien ympyröiden säde?

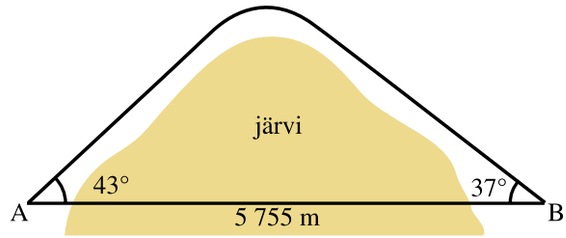
249. Kahdella ympyrällä, jotka sivuavat toisiaan ulkopuolisesti, on kolme yhteistä tangenttia. Laske tangenttien rajaaman kolmion pinta-ala, jos ympyröiden säteet ovat 12 ja 3.

250. Hihna kulkee kahden hihnapyörän ympäri. Laske hihnan pituus.



251. Kaksi ympyrää, joilla on eri keskipisteet, ovat sisäkkäin. Suuremmalle ympyrälle piirretään jänne, joka sivuaa pienempää ja on yhdensuuntainen ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevan suoran kanssa. Osoita, että ympyröiden väliin jäävän alueen pinta-ala on on yhtä suuri kuin tämä jänne halkaisijana piirretyn ympyrän pinta-ala.

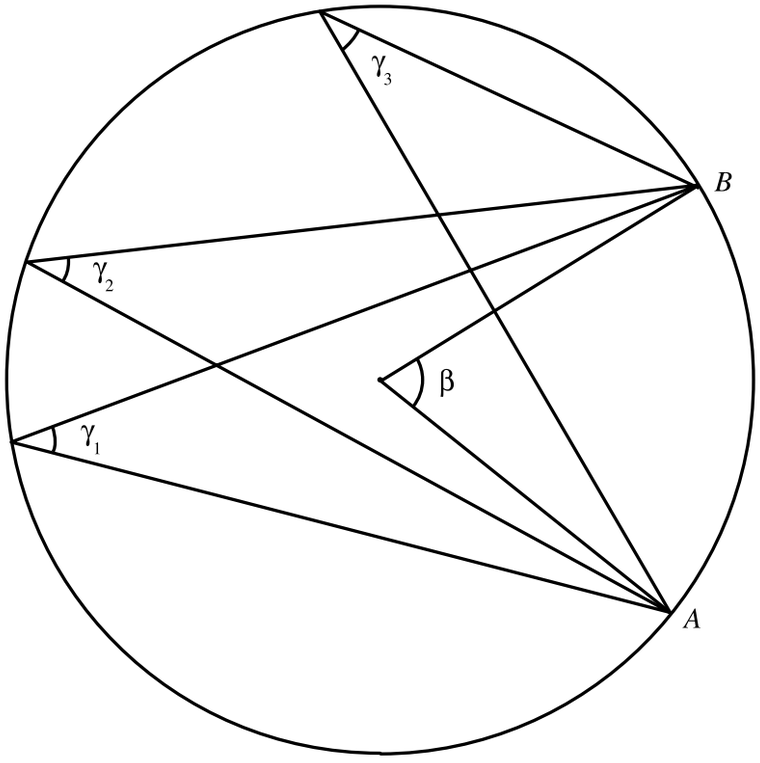
252. Paikkojen A ja B välillä rautatie muodostuu kaarteesta, jonka kaarevuussäde on 1 200 m, ja kahdesta kaarretta sivuavasta suorasta osuudesta. Kuinka pitkä on A:ta ja B:tä yhdistävä rautatie?



Kehäkulma

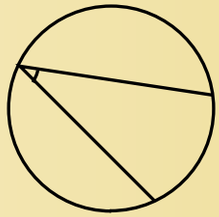
Ongelma

a) Mittaa kuviosta samaa kaarta AB vastaavien kehäkulmien γ_1, γ_2 ja γ_3 suuruudet. Muotoile mittausten perusteella hypoteesi (eli otaksuma) samaa kaarta vastaavien kehäkulmien suuruudesta.
b) Mittaa kuviosta keskuskulman β suuruus. Vertaa sen suuruutta kehäkulmien suuruuteen. Muotoile hypoteesi.



Kehäkulma

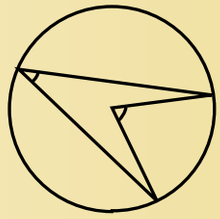
Ympyrän *kehäkulma* on kovera kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja jonka kyljet ovat ympyrän jänteitä.



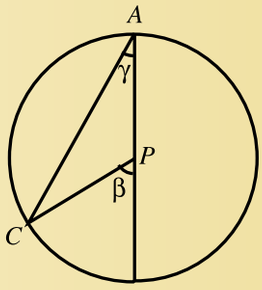
Kehäkulma erottaa ympyrän kehältä kaaren. Kehäkulman ja samaa kaarta vastaavan keskuskulman suuruuksien välillä on seuraavan lauseen kuvaama yhteys.

Kehäkulmalause

> Kehäkulman suuruus on puolet samaa kaarta vastaavan keskuskulman suuruudesta.



Todistus. Todistetaan lause ensin *erikoistapauksessa:* Kehäkulman γ toinen kylki on ympyrän halkaisija.



Osoitetaan, että keskuskulma $\beta = 2\gamma$.

Kolmion PAC sivut PA ja PC ovat ympyrän säteitä. Kolmio PAC on siis tasakylkinen, joten myös kulman PCA suuruus on γ.

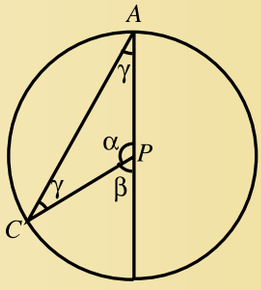
Lasketaan kulmia.

Koska kolmion kulmien summa on $180°$, niin

$\alpha = 180° - 2\gamma$.

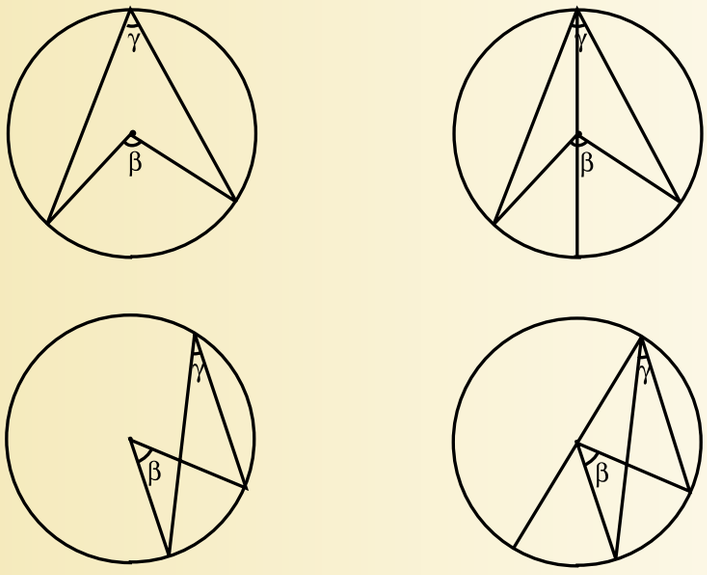
Koska kulma β on kulman α vieruskulma, niin

$\beta = 180° - \alpha = 180° - (180° - 2\gamma) = 2\gamma$.



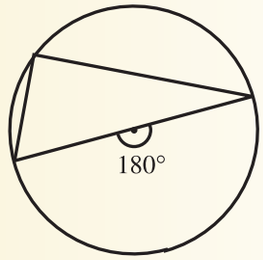
Koska $\beta = 2\gamma$, niin $\gamma = \frac{\beta}{2}$, joten kehäkulman γ suuruus on puolet samaa kaarta vastaavan keskuskulma β suuruudesta.

Lauseen yleinen todistus perustuu edellä todistettuun erikoistapaukseen. Tällöin käsitellään erikseen tilanne, jossa keskipiste on kehäkulman aukeamassa, ja tilanne, jossa keskipiste on aukeaman ulkopuolella. Kummassakin tilanteessa kuvioon lisätään apupiirrokseksi kehäkulman kärjen kautta kulkeva ympyrän halkaisija.



Todistuksen loppuunsaattaminen on tehtävänä 264. □

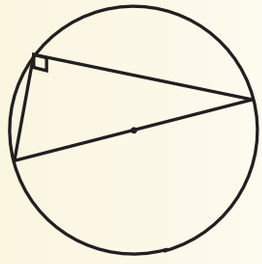
Kehäkulmalauseen tärkeä erikoistapaus on kehäkulma, jonka kaari on puoliympyrä ja jonka päätepisteitä yhdistävä jänne on siten ympyrän halkaisija. Kaarta vastaava keskuskulma on tällöin oikokulma ja kehäkulmalauseen perusteella kehäkulman suuruus on $\frac{180°}{2} = 90°$.



Tulos muotoillaan perinteisesti seuraavasti:

Lause

Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma.

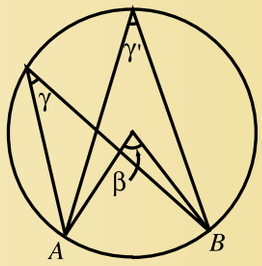


Kehäkulmalauseen avulla voidaan osoittaa todeksi sivun 110 ongelmassa tehtyjen mittausten vihjaama ensimmäinen hypoteesi:

Seurauslause

Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.

Todistus. Olkoot γ ja γ' kaksi samaa kaarta AB vastaavaa kehäkulmaa. Kehäkulmalauseen nojalla kumpikin on puolet kaarta AB vastaavasta keskuskulmasta:

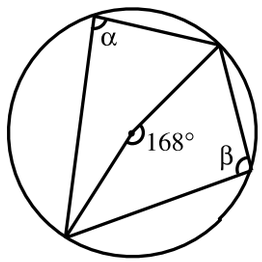


$$\gamma = \frac{\beta}{2} \text{ ja } \gamma' = \frac{\beta}{2}.$$

Siis $\gamma = \gamma'$. □

ESIMERKKI 1

Määritä kehäkulmien α ja β suuruudet.

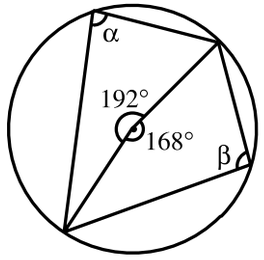


Ratkaisu

Kehäkulman α suuruus on puolet samaa kaarta vastaavan keskuskulman suuruudesta. Siis $\alpha = \frac{168°}{2} = 84°$.

Kehäkulma β vastaa samaa kaarta kuin keskuskulma, jonka suuruus on $360° - 168° = 192°$.

Siis $\beta = \frac{192°}{2} = 96°$.

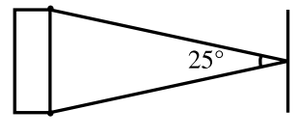


Vastaus

$\alpha = 84°$, $\beta = 96°$

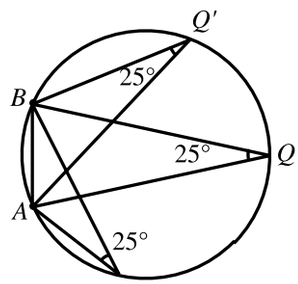
ESIMERKKI 2

Jalkapallomaalin leveys on 7,32 metriä (8 jaardia). Rangaistusalueen rajalta maalin keskikohdan kohdalta maalitolppien väli näkyy 25°:n kulmassa. Määritä jalkapallokentältä kaikki ne paikat, joista maalitolppien väli näkyy samassa 25°:n kulmassa eli joista on yhtä helppo (tai vaikea) saada pallo tolppien väliin.



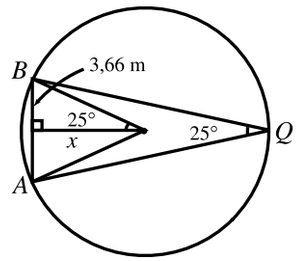
Ratkaisu

Piirretään ympyrä, joka kulkee maalitolppien A ja B sekä laukaisupaikan Q kautta. Jos Q' on tämän ympyrän kehällä, niin kulman $AQ'B$ suuruus on 25°, sillä samaa kaarta AB vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.



Määritetään ympyrän keskipiste. Kuvioon täydennetään kaarta AB vastaava keskuskulma. Keskuskulman suuruus on $2 \cdot 25° = 50°$.

Lasketaan keskipisteen etäisyys maalilinjasta.



$$\tan 25° = \frac{3{,}66}{x} \qquad \big| \cdot x$$

$$x \cdot \tan 25° = 3{,}66 \qquad \big| : \tan 25°$$

$$x = \frac{3{,}66}{\tan 25°} \approx 7{,}8 \text{ (m)}$$

Vastaus

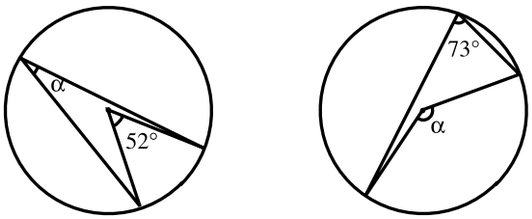
Paikat sijaitsevat sen ympyrän kentänpuoleisella osalla, joka kulkee rangaistusalueen rajan keskikohdan ja maalitolppien kautta. Ympyrän keskipiste on maalin keskikohdan kohdalla 7,8 m:n päässä maalista.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

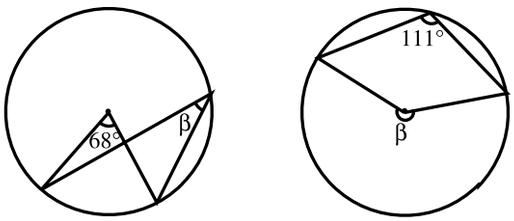
253. Kuinka suuri kulma α on?

a) b)



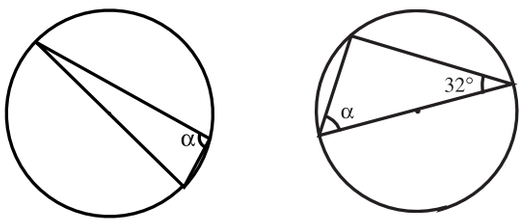
254. Kuinka suuri kulma β on?

a) b)



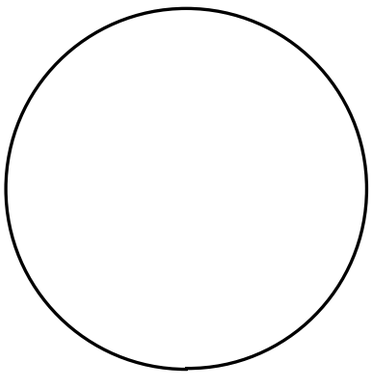
255. Kuinka suuri kulma α on?

a) b)



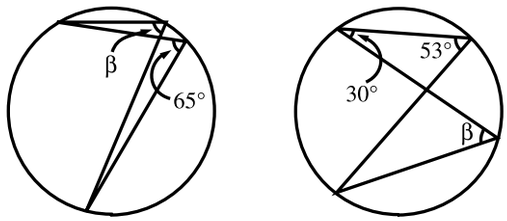
256. Kolmioviivaimella voidaan piirtää suorakulma. Määritä viivaimen avulla ympyrän

a) jokin halkaisija b) keskipiste.

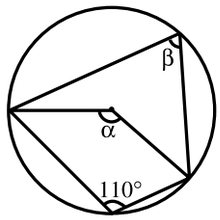


257. Kuinka suuri kulma β on?

a) b)



258. Määritä kulmien α ja β suuruudet.

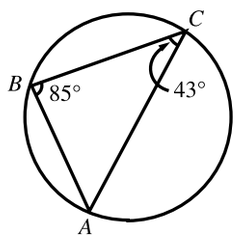


259. a) Osoita, että ympyrän sisään piirretyn nelikulmion vastakkaisten kulmien summa on oikokulma. Ympyrän sisään piirretty nelikulmio on nelikulmio, jonka kaikki kärjet ovat ympyrän kehällä.

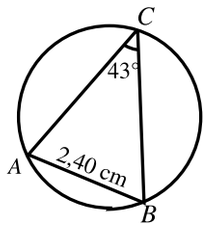
b) Voidaanko jokaisen nelikulmion ympäri piirtää ympyrä? Perustele vastauksesi. Nelikulmion ympäri piirretty ympyrä on ympyrä, joka kulkee nelikulmion kaikkien kärkien kautta.

260. Ympyrän säde on 8,2 cm. Laske kolmion ABC

a) sivujen pituudet b) pinta-ala.

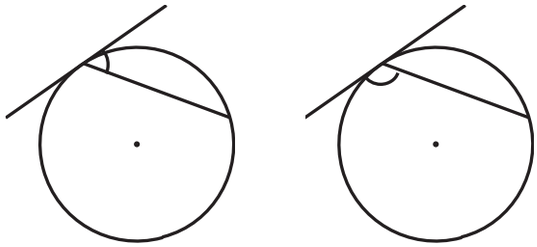


261. Jokaisen kolmion ympäri voidaan piirtää ympyrä. Kuinka pitkä kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde on?



262. Jalkapallossa rangaistuspotku potkaistaan ns. pilkulta, maalin keskikohdan kohdalta 11,0 metrin etäisyydeltä maalista. Määritä jalkapallokentältä kaikki ne kohdat, joista on yhtä helppo (tai vaikea) saada pallo tolppien väliin kuin pilkulta. Maalin leveys on 7,32 m.

263. Kulma, jonka toisena kylkenä on ympyrän tangentti ja toisena kylkenä sivuamispisteestä lähtevä ympyrän jänne, on ympyrän niin sanottu tangenttikulma. Tangenttikulma erottaa ympyrän kehältä kaaren. Osoita, että tangenttikulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

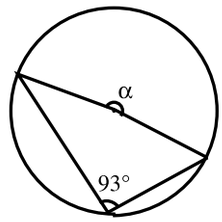


SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

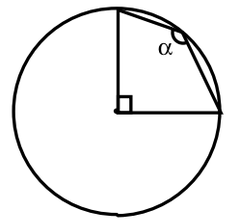
264. Sivulla 111 todistettiin kehäkulmalause erikoistapauksessa, jossa kehäkulman toinen kylki on ympyrän halkaisija. Käytä hyväksi todistettua erikoistapausta ja todista kehäkulmalause, kun ympyrän keskipiste on
a) kehäkulman aukeamassa
b) kehäkulman aukeaman ulkopuolella.

265. Kuinka suuri kulma α on?

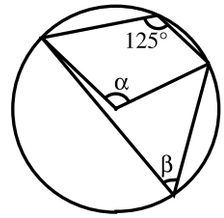
a)



b)

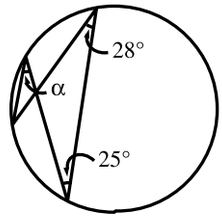


266. Kuinka suuret kulmat α ja β ovat?

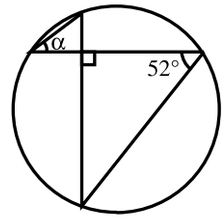


267. Kuinka suuri kulma α on?

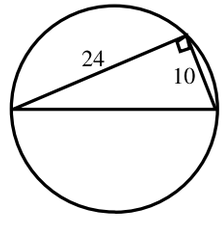
a)



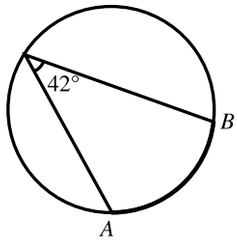
b)



268. Suorakulmaisen kolmion ympäri on piirretty ympyrä. Määritä ympyrän keskipiste ja säde.



269. Ympyrän säde on 8,2 cm. Kuinka pitkä on pisteitä A ja B yhdistävä kaari?



270. Rakennuksen julkisivun leveys on 28 m. Rakennus valokuvataan kameralla, jonka objektiivin näkökulma on 36°. Missä kuvaajan tulee olla, jotta julkisivu juuri tulisi kuvaan koko leveydeltään?

271. Ympyrään piirretään kaksi toisensa leikkaavaa jännettä AB ja CD. Olkoon P jänteiden leikkauspiste. Osoita, että kolmiot ACP ja DPB ovat yhdenmuotoiset.

272. Ympyrällä on jänne, jonka pituus on 9. Eräs ympyrän halkaisija jakaa jänteen osiin, joiden pituudet ovat 3 ja 6. Halkaisija jakautuu leikkauspisteessä kahteen osaan, joista lyhyemmän pituus on 2. Kuinka pitkä ympyrän halkaisija on?

273. Palkin poikkileikkaus on kolmio, jonka sivujen pituudet ovat 5,0 cm, 6,0 cm ja 7,0 cm. Kuinka suuri pyöreä aukko levyyn on porattava, jotta palkki mahtuisi aukosta?

274. Ympyrään piirrettyjen samasta kehän pisteestä lähtevien 12,1 cm:n ja 18,5 cm:n pituisten jänteiden välinen kulma on 26,4°. Kuinka pitkä ympyrän säde on?

275. Kaksi ympyrää leikkaa toisensa pisteissä A ja B. Pisteestä A piirretään molempiin ympyröihin halkaisijat AC ja AD. Osoita, että pisteet B, C ja D ovat samalla suoralla.

276. Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan ulkopuolisesti. Ympyröille piirretään yhdensuuntaiset säteet keskipisteiden kautta kulkevan suoran samalle puolelle ja säteiden kehällä olevista päätepisteistä piirretään janat ympyröiden sivuamispisteeseen. Osoita, että janat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Suorakulmainen särmiö

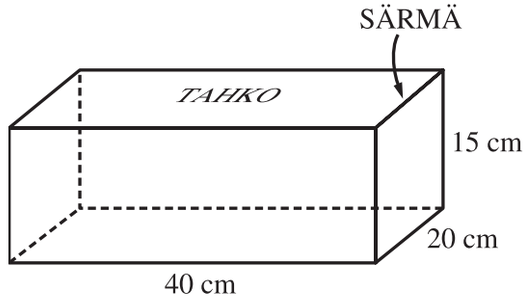
JOHDANTOESIMERKKI 1

Suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon pohjasärmien pituudet ovat 40 cm ja 20 cm, ja laatikon korkeus on 15 cm. Piirrä kuva laatikosta ja laske laatikon tilavuus. Mahtuuko 48 cm:n pituinen suora sauva laatikkoon?

Ratkaisu

Suorakulmaisen särmiön sekä särmät että tahkot ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Suorakulmainen särmiö piirretään yleensä *kavaljeeriperspektiivissä*.

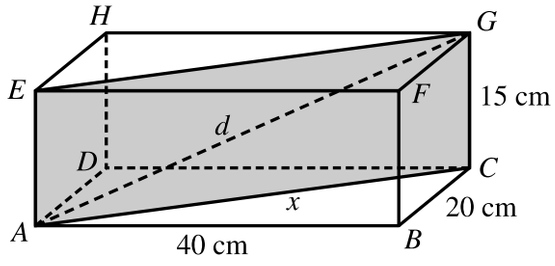
Edessä ja takana olevat tahkot piirretään suorakulmioina oikeissa mittasuhteissa. Syvyyssuunnassa kulkeva särmä piirretään 45°:n kulmassa, ja särmän pituus kuvassa on puolet todellista vastaavasta mitasta.



Laatikon tilavuus on pohjasärmien pituuksien ja korkeuden tulo.

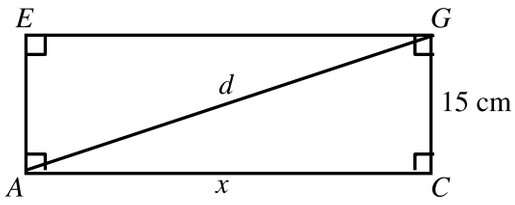
$$V = 40\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} = 12\,000\text{ cm}^3 = 12\text{ dm}^3$$

Kaikkein pisin laatikkoon mahtuva sauva ulottuu särmiön kärjestä vastakkaiseen kärkeen. Vastakkaisia kärkiä yhdistävä jana on särmiön niin sanottu *avaruuslävistäjä*.



Avaruuslävistäjän AG pituuden laskemiseksi särmiö leikataan tasolla, joka kulkee vastakkaisten särmien AE ja CG kautta.

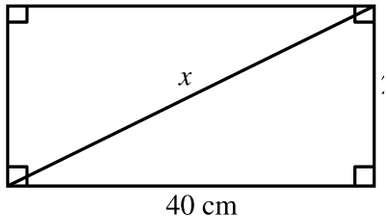
Leikkauskuvio on suorakulmio, jonka sivut ovat pohjatahkon lävistäjä x ja särmiön korkeus. Avaruuslävistäjä d on suorakulmion lävistäjä.



Pythagoraan lauseen nojalla $d^2 = x^2 + 15^2$.

On siis laskettava pohjatahkon lävistäjä x.

Pythagoraan lauseen nojalla
$x^2 = 40^2 + 20^2$.



Kun lausekkeeseen $d^2 = x^2 + 15^2$ sijoitetaan $x^2 = 40^2 + 20^2$, saadaan:

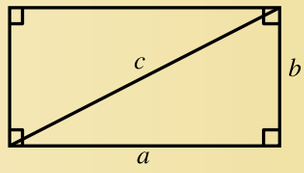
$d^2 = 40^2 + 20^2 + 15^2$

$d \approx 47{,}2$ (cm)

Siis 48 cm pitkä sauva ei mahdu laatikkoon.

Vastaus Tilavuus on $12\ \text{dm}^3$. Ei mahdu.

Eräs tapa muotoilla Pythagoraan lause on: Suorakulmion lävistäjän pituuden neliö on sivujen pituuksien neliöiden summa.

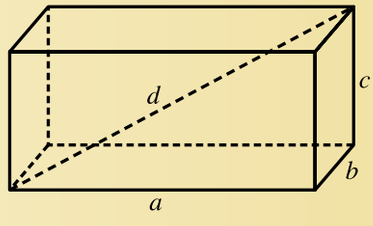


$c^2 = a^2 + b^2$

Näin muotoiltu Pythagoraan lause yleistyy kolmiulotteiseen avaruuteen.

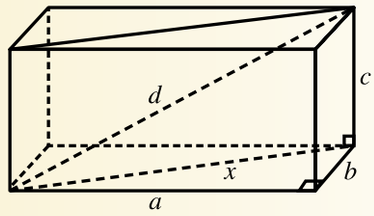
Pythagoraan lause avaruudessa

Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituuden neliö on särmien pituuksien neliöiden summa.



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Todistus:
Ratkaistaan Pythagoraan lauseella ensin pohjatahkon lävistäjän neliö.



$$x^2 = a^2 + b^2$$

Sitten ratkaistaan avaruuslävistäjän neliö,

$$d^2 = x^2 + c^2 \qquad \text{Sijoitetaan } x^2 = a^2 + b^2.$$
$$= a^2 + b^2 + c^2$$

m.o.t.

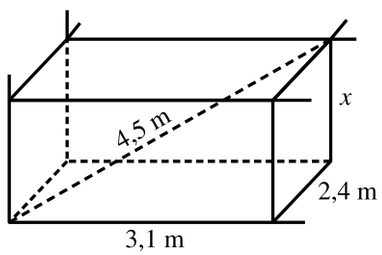
Pythagoraan lause yleistyy myös korkeampiulotteisiin avaruuksiin. Se on niidenkin geometrisen tutkimisen tärkeimpiä välineitä.

ESIMERKKI 2

Huoneen pituus on 6,2 metriä ja leveys 4,8 metriä. Keskelle huonetta ripustetaan lamppu. Lampun etäisyys lattianurkista ei saa ylittää 4,5 metriä. Kuinka korkealla lattiasta lamppu saa olla?

Ratkaisu

Lattianurkka ja lamppu ovat vastakkaisia kärkiä suorakulmaisessa särmiössä, jonka pohjasärmät ovat huoneen pituuden ja leveyden puolikkaat ja jonka korkeus on lampun etäisyys lattiasta.



Kun lampun etäisyys lattianurkasta on 4,5 m, niin:

$$4{,}5^2 = 3{,}1^2 + 2{,}4^2 + x^2$$
$$x^2 = 4{,}5^2 - 3{,}1^2 - 2{,}4^2$$
$$x \approx 2{,}2 \text{ (m)}$$

Vastaus

Enintään 2,2 metrin korkeudella.

JOHDANTOESIMERKKI 3

Suorakulmainen särmiö suurennetaan niin, että särmät tulevat nelinkertaisiksi. Kuinka moninkertaiseksi särmiön tilavuus tulee? Entä kuinka moninkertaiseksi tilavuus tulee, jos särmät suurennetaan 15-kertaisiksi?

Ratkaisu

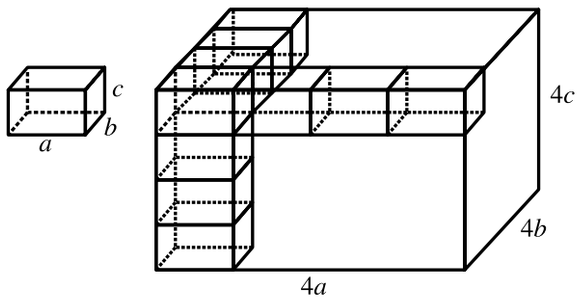
Merkitään alkuperäisen särmiön pituutta, leveyttä ja korkeutta a, b ja c.

Alkuperäisen särmiön tilavuus on abc.

Suurennetun särmiön tilavuus on

$$4a \cdot 4b \cdot 4c = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot abc = 4^3 \cdot abc = 64abc.$$

Tilavuus tulee siis 4^3-kertaiseksi eli 64-kertaiseksi.



Vastaavasti, jos särmät suurennetaan 15-kertaisiksi, niin tilavuus tulee 15^3-kertaiseksi eli 3 375-kertaiseksi.

Vastaus

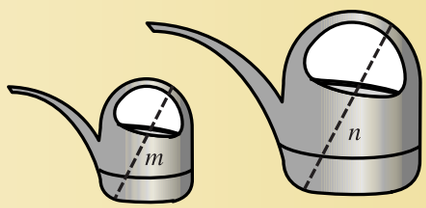
64-kertaiseksi, 3 375-kertaiseksi

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuslause

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on yhdenmuotoisuussuhteen kuutio.

Jos kappaleet ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{m}{n}$, kappaleiden tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^3.$$



Lauseen todistus, jota tässä ei voida suorittaa täsmällisesti, perustuu siihen, että jokainen kappale, jolla on tilavuus, voidaan täyttää kuinka tarkasti tahansa suorakulmaisilla särmiöillä.

ESIMERKKI 4

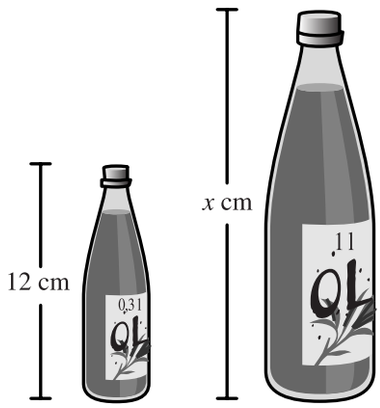
Oliiviöljyä myydään keskenään yhdenmuotoisissa 1 litran ja 0,3 litran pulloissa. Pienemmän pullon korkeus on 12 cm. Kuinka korkea isompi pullo on?

Ratkaisu

Olkoon suuremman pullon korkeus x cm.

Pullot ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{x}{12}$.

Pullojen tilavuuksien suhde on yhtä suuri kuin yhdenmuotoisuussuhteen kuutio.



$$\left(\frac{x}{12}\right)^3 = \frac{1}{0{,}3}$$

Ratkaistaan ensin $\frac{x}{12}$. Toinen tapa on suorittaa ensin potenssiin korottaminen $\left(\frac{x}{12}\right)^3 = \frac{x^3}{12^3}$.

$$\frac{x}{12} = \sqrt[3]{\frac{1}{0{,}3}} \qquad \mid \cdot 12$$

Kuutiojuuri voidaan merkitä ja laskea myös murtopotenssina $\left(\frac{1}{0{,}3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

$$x = 12 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{0{,}3}} \approx 18 \text{ (cm)}$$

Vastaus

18 cm

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

277. Kuution muotoiselle laatikolle tehdään kehikko leikkaamalla ja taivuttamalla särmät 160 cm pitkästä rautalangasta. Laske laatikon
a) tilavuus b) kokonaispinta-ala.

278. Suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon pituuden, leveyden ja korkeuden suhde on 3 : 2 : 1. Laatikon vetoisuus on 12,0 litraa. Määritä laatikon mitat.

279. Suorakulmaisen särmiön pohjasärmät ovat 11,5 cm ja 9,0 cm ja korkeus 6,3 cm. Kuinka pitkä on särmiön
a) suuremman sivutahkon lävistäjä
b) avaruuslävistäjä?

280. Seuraavia tuloksia tarvitaan usein, joten ne kannattaa painaa muistiin.
a) Neliön sivu on a. Kuinka pitkä neliön lävistäjä on?
b) Kuution särmä on a. Kuinka pitkä kuution avaruuslävistäjä on?

281. Normaalissa samppanjapullossa on 0,75 litraa viiniä. Käytössä on myös suurempia pulloja, joita kutsutaan muinaisten Babylonian ja Israelin kuninkaiden ranskalaisilla nimillä.

tilavuus (l)	pullon nimi
1,5	magnum
3	Jéroboam
4,5	Rehoboam
6	Methuselah
9	Salmanazar
12	Balthazar
15	Nebuchadnezzar

Saman samppanjatalon erikokoiset pullot ovat kaikki keskenään jokseenkin yhdenmuotoiset.
a) Minkä niminen on pullo, joka on kaksi kertaa niin korkea kuin tavallinen 0,75 litran pullo?
b) Tavallisen 0,75 litran pullon korkeus on 29 cm. Kuinka korkea Balthazarpullo on?

282. Kun Muumi-ilmapalloon oli pumpattu 12 litraa kaasua, pallon pituus oli 32 cm. Kuinka pitkäksi pallo tulee, kun siihen pumpataan vielä 24 litraa kaasua?

283. Pieni nisäkäs pystyy hyppäämään vahingoittumatta omaa korkeuttaan monta kymmentä kertaa korkeammalta. Norsu ei pysty hyppäämään metrinkään korkeudelta särkemättä luitaan. Selitys on, että yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuudet ja yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alat eivät muutu samassa suhteessa. Eläimen koon kasvaessa sen tilavuus, ja siis myös massa, kasvaa suoraan verrannollisena ulottuvuuden kuutioon. Luun kantokyky sen sijaan on suoraan verrannollinen luun poikkileikkauksen pinta-alaan, ja se siis kasvaa suoraan verrannollisena ulottuvuuden neliöön.
a) Kahdesta yhdenmuotoisesta eläimestä suuremman korkeus on 12-kertainen pienempään verrattuna. Kuinka moninkertainen on suuremman eläimen massa? Entä kuinka moninkertainen on suuremman eläimen luuston kantokyky?
b) Luuston kantokyvyn lisäksi myös lihasvoimasta riippuu, kuinka suuria taakkoja nisäkäs pystyy nostamaan ja kantamaan. Lihaksen voima on suoraan verrannollinen lihaksen poikkileikkauksen pinta-alaan. Oletetaan, että pieni nisäkäs pystyy kantamaan taakan, joka on sen oma massa kymmenkertaisena. Paljonko sen kanssa yhdenmuotoinen korkeudeltaan viisinkertainen nisäkäs pystysi kantamaan?
c) Miesten painonnoston työnnön maailmanennätys 62 kg:n painoluokassa on 182,5 kg (syyskuu 2004, pienin painonlisäys on 0,5 kg). Mikä olisi yhtä hyvä tulos 77 kg:n painoluokassa?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

284. Laatikko, jonka ulkomitat ovat 80 cm, 60 cm ja 40 cm, on valmistettu 8,0 cm:n paksuisesta styrokslevystä.
a) Laske laatikon vetoisuus litroina.
b) Kuinka paljon laatikko painaa? Yksi kuutiodesimetri styroksia painaa 21 g.

285. Kahden desilitran vetoinen pakkaus on muodoltaan suorakulmainen särmiö, jonka pohja on neliö ja korkeus neljä kertaa niin suuri kuin pohjasärmä. Määritä pakkauksen mitat.

286. Kuinka suuri ovessa olevan pyöreän aukon läpimitan on vähintään oltava, jotta aukon läpi mahtuisi suorakulmaisen särmiön muotoinen laatikko, jonka pituus on 15,0 cm, leveys 12,0 cm ja korkeus 7,0 cm?

287. Kissa kulki 20 metriä suoraan, kääntyi 90°, kulki 15 metriä suoraan ja kiipesi puuhun 9 metrin korkeuteen. Mikä on kissan lopullisen sijaintipaikan etäisyys lähtöpaikasta?

288. Monet lentoyhtiöt noudattavat käsimatkatavaran suhteen ns. 115 senttimetrin sääntöä: Käsimatkatavarana voi kuljettaa suorakulmaisen särmiön muotoista esinettä, jonka pituuden, leveyden ja korkeuden summa ei ylitä 115 senttimetriä.
Laukun pohja on neliön muotoinen ja laukun korkeus on 33 cm. Määritä käsimatkatavaraksi kelpaavan mahdollisimman tilavan laukun muut mitat. Mahtuuko laukkuun 63 cm:n pituinen suorakahvainen sateenvarjo?

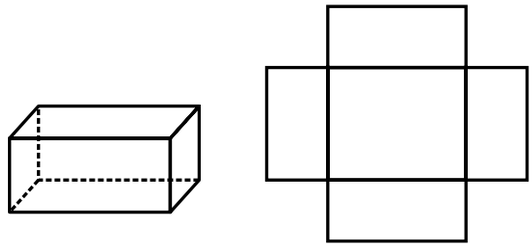
289. Kappaleen kokoa muutetaan niin, että se säilyy yhdenmuotoisena. Kuinka moninkertaisiksi kappaleen mitat tulee
a) suurentaa, jotta tilavuus kaksinkertaistuisi
b) pienentää, jotta tilavuus puolittuisi?

290. Maalia myydään keskenään yhdenmuotoisissa 9 litran ja 3 litran astioissa. Suuremman astian korkeus on 36 cm. Kuinka korkea pienempi astia on?

291. Samanlaista jauhoa myydään kahdenkokoisessa keskenään yhdenmuotoisessa pakkauksessa, joista pienemmän pakkauksen korkeus on 12,0 cm ja suuremman 18,0 cm. Pienemmän pakkauksen hinta on 2,90 euroa ja suuremman 8,90 euroa. Kuinka monta prosenttia halvempaa (yksikköhinnoilla mitattuna) jauho on suuremmassa pakkauksessa?

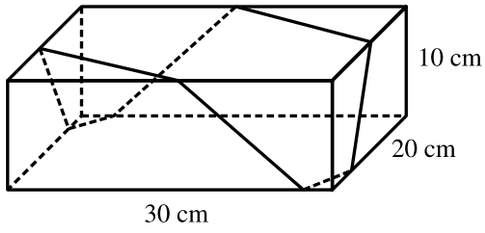
292. Jään läpi halutaan nostaa kuution muotoinen kotelo, jonka särmien pituus on 45 cm. Kuinka suuri pyöreä reikä jäähän tulee kairata, jos köysi on kiinnitetty
a) tahkon keskipisteeseen
b) särmän keskipisteeseen?

293. Suorakulmaisen särmiön muotoisen huoneen pituus on 6,00 m, leveys 5,00 m ja korkeus 3,00 m. Huoneen kattonurkassa on muurahainen, joka haluaa kulkea vastakkaiseen lattianurkkaan. Muurahainen osaa kulkea myös katossa. Kuinka pitkä lyhin reitti on? Mikä on lyhin reitti?
(Ohje: Tutki reittejä särmistä auki leikatusta ja tasoon levitetystä laatikosta. Huomaa, että tasoon levittämisen voi tehdä eri tavoin.)



294. Neuvo edellisen tehtävän muurahaiselle lyhin reitti kattonurkasta vastakkaisen lyhyemmän seinän keskikohtaan. Kuinka pitkä lyhin reitti on?

295. Nauha on kiedottu lahjapaketin ympäri kuvion mukaisesti ja vedetty kireäksi. Paketin mitat ovat $30\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. Kuinka pitkä nauha on?

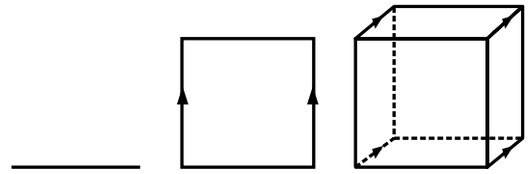


296. Kun yksiulotteisen avaruuden (eli suoran) yksikön mittainen jana liikkuu yksikön verran uuteen kohtisuoraan ulottuvuuteen, muodostuu neliö. Kun neliö liikkuu yksikön verran kohtisuoraan kolmanteen ulottuvuuteen, muodostuu kuutio. Kun kuutio taas liikkuu yksikön verran neljänteen ulottuvuuteen, muodostuu neliulotteisen avaruuden hyperkuutio. Kuinka monta

a) kärkeä
b) särmää
c) neliön muotoista tahkoa
d) kuution muotoista hypertahkoa

neliulotteisen avaruuden hyperkuutiossa on?

e) Kuinka pitkä hyperkuution lävistäjä on?

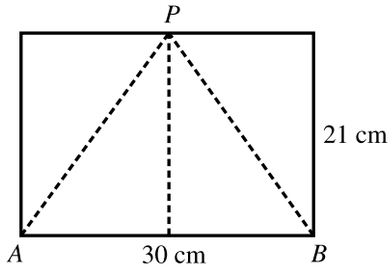


Kulma avaruudessa

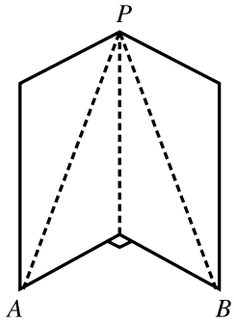
Ongelma 1

Taita A4-kokoinen paperiarkki keskeltä. Yhdistä taitosviivan toinen päätepiste P vastakkaisen sivun kärkiin A ja B.

a) Kuinka suuri kulma APB on, kun arkki on avattuna? A4-arkin sivujen pituudet ovat senttimetrin tarkkuudella 21 cm ja 30 cm.

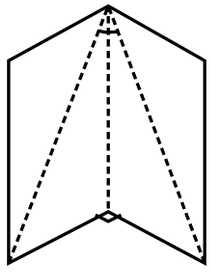


b) Taita arkkia vähitellen. Kuinka kulma APB muuttuu? Arvioi, kuinka suuri kulma APB on silloin, kun taitokset ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Leikkaa arkin nurkat pois pitkin janoja AP ja BP ja mittaa kulma.



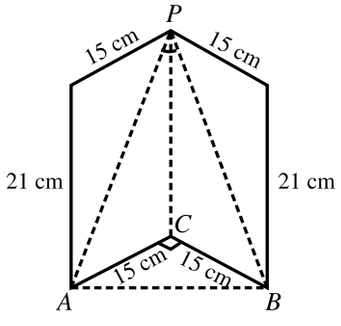
ESIMERKKI 1

A4-arkki on taitettu keskeltä niin, että taitokset ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Kuinka suuri on tällöin taitoksen päästä vastakkaisiin kärkiin piirrettyjen janojen välinen kulma? A4-arkin mitat ovat senttimetrin tarkkuudella 21 cm ja 30 cm.



Ratkaisu

Laskettava kulma on tasakylkisen kolmion APB huippukulma. Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

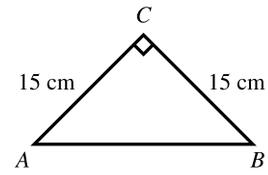


Kolmion kyljet PA ja PB ovat puoliarkin lävistäjiä*:

$|PA|^2 = 15^2 + 21^2$

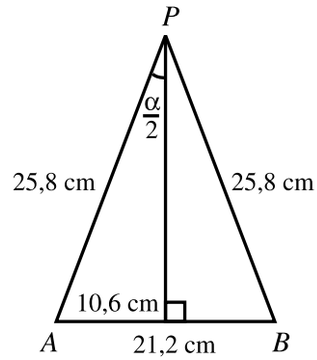
$|PA| \approx 25{,}8$ (cm)

Sivun AB pituus lasketaan taitoksen päätykolmiosta ABC, joka on tasakylkinen suorakulmainen kolmio. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on kateetin pituus kerrottuna luvulla $\sqrt{2}$, joten**



$|AB| = 15\sqrt{2} \approx 21{,}2$ (cm).

Ratkaistaan kulma $APB = \alpha$.



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{10{,}6}{25{,}8}$$

$$\frac{\alpha}{2} \approx 24{,}3° \qquad | \cdot 2$$

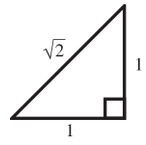
$$\alpha \approx 49°$$

Vastaus 49°

---

* Janan PA pituutta merkitään joko samalla merkinnällä kuin itse janaa, siis PA, tai merkinnällä $|PA|$, joka on laskulausekkeissa usein selkeämpi.

** Käytettiin muistikolmiota:



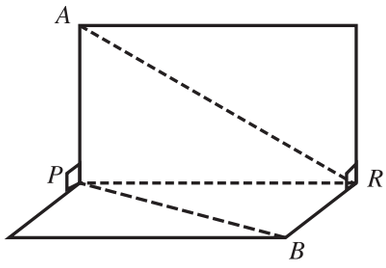
Voidaan myös laskea Pythagoraan lauseella: $|AB|^2 = 15^2 + 15^2$.

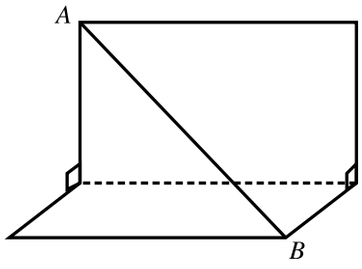
Ongelma 2

Taita A4-arkin puolikasta kuvion mukaisesti ylöspäin, kunnes se on kohtisuorassa vaakatasoa vastaan.

a) Kuinka suuri lävistäjän BP ja janan AP välinen kulma on? Entä kuinka suuri on lävistäjän AR ja janan BR välinen kulma?

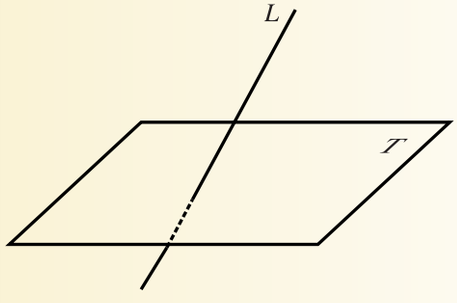
b) Yhdistä arkin vastakkaiset kärjet A ja B esimerkiksi viivaimen reunalla. Arvioi, kuinka suuri janan AB ja pystysuoran taitoksen välinen kulma on. Mittaa kulma.





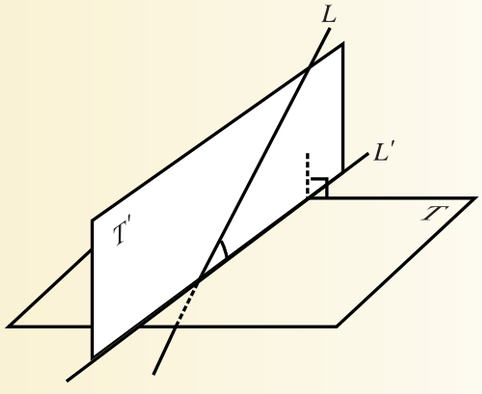
Suoran ja tason välinen kulma

Suora L leikkaa tason T.



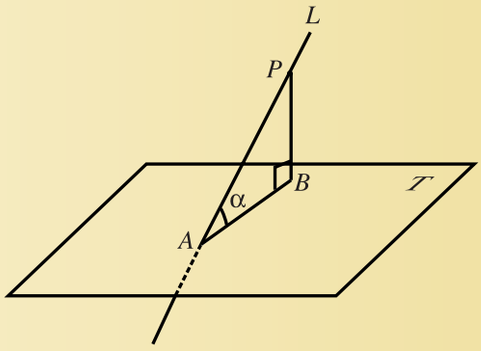
Olkoon T' taso, joka sisältää suoran L ja joka on kohtisuorassa tasoa T vastaan.

Suoran L ja tason T välinen kulma on terävä (tai suora) kulma, joka muodostuu suoran L ja tasojen T ja T' leikkaussuoran L' välille.



Suoran ja tason välinen kulma voidaan usein määrittää seuraavasti:

Piirretään jonkin suoran L pisteen P kautta normaali (kohtisuora) tasolle T ja määritetään kulman α suuruus suorakulmaisesta kolmiosta PAB, missä B on normaalin ja tason leikkauspiste. Pistettä B sanotaan pisteen P *kohtisuoraksi projektioksi tasolla* T.

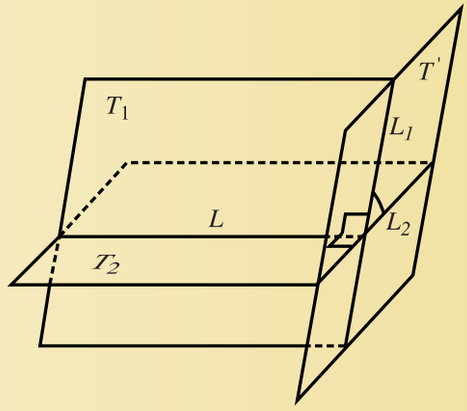


Kahden tason välinen kulma

Tasot, jotka eivät ole yhdensuuntaisia, leikkaavat toisensa pitkin suoraa.

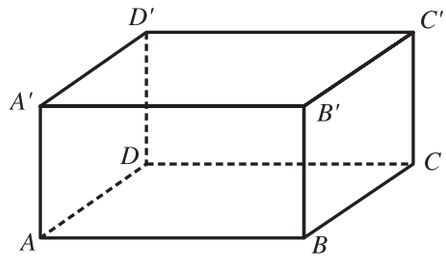
Olkoon T' taso, joka on kohtisuorassa tasojen T_1 ja T_2 leikkaussuoraa L vastaan. Taso T' leikkaa tason T_1 pitkin suoraa L_1 ja tason T_2 pitkin suoraa L_2.

Tasojen T_1 *ja* T_2 *välinen kulma* on suorien L_1 ja L_2 välinen terävä (tai suora) kulma.



ESIMERKKI 2

Suorakulmaisen särmiön pohja $ABCD$ on neliö, ja särmiön korkeus on puolet pohjasärmän pituudesta.

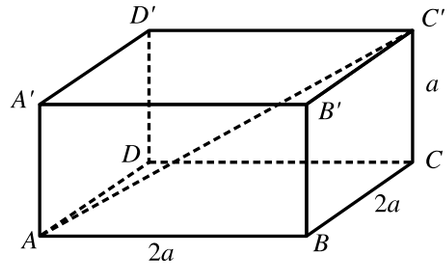


a) Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella kärjestä A lähtevän avaruuslävistäjän ja vastakkaisen tahkon $BCC'B'$ välisen kulman suuruus.

b) Särmä AB ja sen kanssa vastakkainen särmä määräävät tason. Laske tämän tason ja pohjatason välisen kulman suuruus.

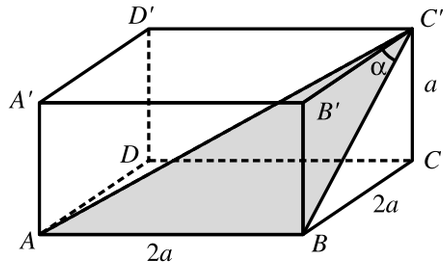
Ratkaisu

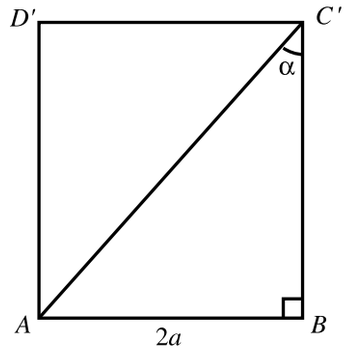
a) Laskuja varten särmien pituuksille on valittu sopivat merkinnät. Korkeutta on merkitty a, jolloin pohjasärmät ovat $2a$.



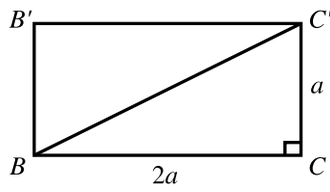
On laskettava avaruuslävistäjän AC' ja tahkon $BCC'B$ välisen kulman suuruus.

Särmä AB on kohtisuorassa tahkoa $BCC'B$ vastaan, joten pisteen A kohtisuora projektio tahkolla on B. Avaruuslävistäjän AC' ja tahkon $BCC'B$ välinen kulma on suorakulmaisen kolmion $AC'B$ kulma C'.





Kolmion $AC'B$ kateetti BC' on tahkon lävistäjä.



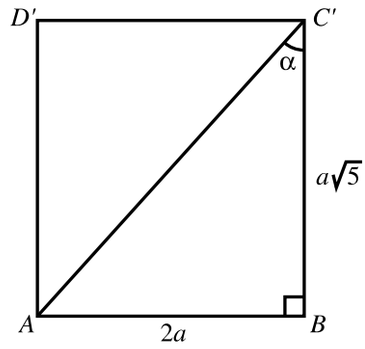
$$|BC'|^2 = (2a)^2 + a^2$$

$$|BC'|^2 = 4a^2 + a^2$$

$$|BC'|^2 = 5a^2$$

$$|BC'| = a\sqrt{5}$$

Saadaan:

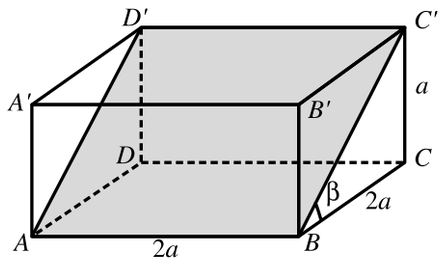


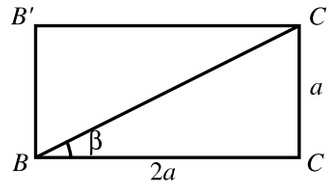
$$\tan\alpha = \frac{2\cancel{a}^{1}}{\cancel{a}_{1}\sqrt{5}}$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha \approx 41{,}8°$$

b) Särmien AB ja $D'C'$ kautta kulkevan tason ja pohjatason välinen kulma on tasoja vastaan kohtisuoran päätytahkon $BCC'B'$ kulma $C'BC$.





Saadaan:

$$\tan\beta = \frac{\cancel{a}^{1}}{2\cancel{a}_{1}}$$

$$\tan\beta = \frac{1}{2}$$

$$\beta \approx 26{,}6°$$

Vastaus a) 41,8° b) 26,6°

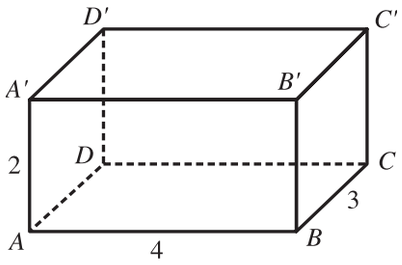
TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

297. A4-arkki on taitettu keskeltä lyhyemmän sivun suuntaisesti kuten esimerkissä 1 niin, että taitosten välinen kulma on $60°$. Kuinka suuri on tällöin taitosviivan päästä vastakkaisiin kärkiin piirrettyjen janojen välinen kulma? A4-arkin mitat ovat senttimetrin tarkkuudella 21 cm ja 30 cm.

298. Laske ongelman 2 b-kohdassa tutkitun kulman suuruus. Tarvittavat janojen pituudet on laskettu esimerkissä 1.

299. Kuvion suorakulmaisen särmiön särmien pituudet ovat 4, 3 ja 2. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella kärjestä A lähtevän avaruuslävistäjän ja tahkon a) $ABCD$ b) $ABB'A'$ c) $BCC'B'$ välinen kulma.

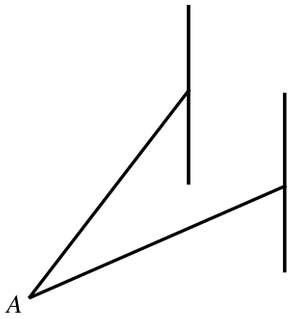


300. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella edellisen tehtävän suorakulmaisen särmiön
a) särmien AB ja $D'C'$ kautta kulkevan tason ja pohjan $ABCD$ välinen kulma
b) särmien AB ja $D'C'$ kautta kulkevan tason ja särmien $A'B'$ ja DC kautta kulkevan tason välinen kulma.

301. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella tehtävän 299 suorakulmaisen särmiön sivutahkojen lävistäjien AB' ja AD' välinen kulma.

302. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) kuution avaruuslävistäjän ja samasta kärjestä lähtevän särmän
b) kuution avaruuslävistäjän ja kuution tahkon
c) kuution kahden avaruuslävistäjän välinen kulma.

303. Piste A on maassa samalla 8,0 metrin etäisyydellä kahdesta pystysuorasta pylväästä, joiden etäisyys on 6,0 metriä. Pisteestä A on vedetty yhtä korkealle pylväisiin suoriksi pingotetut tukivaijerit. Laske vaijerien välinen kulma, kun niiden kiinnityskohdat pylväissä ovat
a) maassa b) 9,0 metrin korkeudella.
Kuinka vaijerien välinen kulma muuttuu, jos kiinnityskohtaa nostetaan?



304. Rantakalliolta paikasta P 152 metrin korkeudelta havaitaan merellä kaksi alusta A ja B, joista ensimmäinen näkyy $15{,}7°$ vaakatason alapuolella ja toinen $8{,}1°$ vaakatason alapuolella. Suuntien PA ja PB välisen kulman suuruudeksi mitataan $118°$. Mikä on alusten A ja B etäisyys toisistaan?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

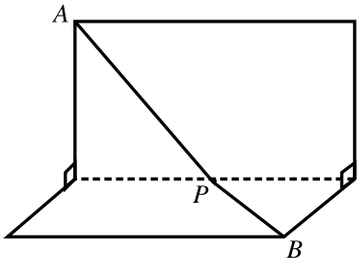
305. Oven leveys on 82 cm ja korkeus 204 cm. Kuinka suuri on oven lävistäjän alku- ja loppuasennon välinen kulma, kun ovea avataan
a) 60° b) 90°?

306. A4-arkki taitetaan keskeltä lyhyemmän sivun suuntaisesti. Kuinka suuri taitosten välisen kulman tulisi olla, jotta taitosviivan päästä vastakkaisiin kärkiin piirrettyjen janojen välinen kulma olisi 60°? A4-arkin mitat ovat senttimetrin tarkkuudella 21 cm ja 30 cm.

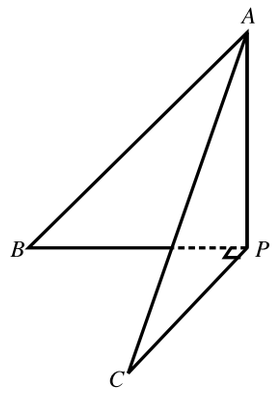
307. Suorakulmaisen särmiön pohja $ABCD$ on neliö ja särmiön korkeus on kolmasosa pohjasärmän pituudesta. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) kärjestä A lähtevän avaruuslävistäjän ja pohjan $ABCD$ välinen kulma
b) kärjestä A lähtevän avaruuslävistäjän ja vastakkaisen tahkon $CDD'C'$ välinen kulma
c) pohjan kahdesta vierekkäisestä kärjestä lähtevien avaruuslävistäjien välinen kulma.
(Kärjen A yläpuolella olevaa kärkeä on merkitty A' jne.)

308. Huoneen pituus on 6,0 m, leveys 4,0 m ja korkeus 3,0 m. Kuinka suuri on samasta kattonurkasta lähtevien seinien lävistäjien välinen kulma?

309. A4-arkki on taitettu keskeltä niin, että taitokset ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Kuinka suuri on lävistäjän puolikkaiden PA ja PB välinen kulma? A4-arkin mitat ovat senttimetrin tarkkuudella 21 cm ja 30 cm.



310. Leikkaa paperista tasakylkinen suorakulmainen kolmio. Taita kolmio kuvion mukaisesti pitkin hypotenuusalle piirrettyä korkeusjanaa niin, että taitosten välinen kulma on suorakulma. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella

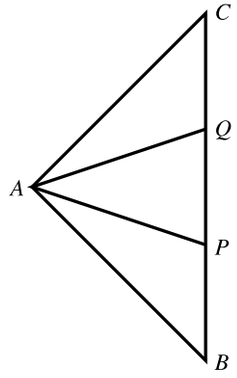


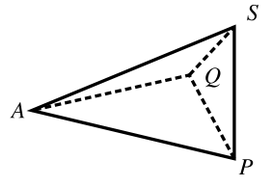
a) tasojen ABC ja PBC välinen kulma
b) janan AP ja tason ABC välinen kulma.

311. Lentokone lentää 4,3 kilometrin korkeudella, ja se näkyy paikasta A pohjoisessa 27° horisontin yläpuolella. Toinen lentokone lentää 7,2 kilometrin korkeudella ja näkyy paikasta A idässä 47° horisontin yläpuolella. Kuinka etäällä koneet ovat toisistaan?

312. Lentokone A näkyy maassa olevasta pisteestä P etelässä 26,0° horisontin yläpuolella ja lentokone B lännessä 52,0° horisontin yläpuolella. Kuinka suuri suuntien PA ja PB välinen kulma on?

313. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion ABC kantasivu BC jaetaan pisteillä P ja Q kolmeen yhtä pitkään osaan. Kolmio taitetaan pitkin janoja AP ja AQ niin, että kärjet B ja C yhtyvät pisteessä S. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) särmän AS ja tason APQ välinen kulma
b) tahkojen APS ja AQS välinen kulma.
(Ohje: Tee malli paperista.)



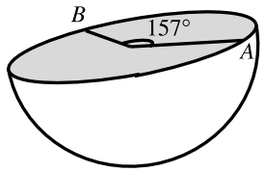


Pallo

Ongelma

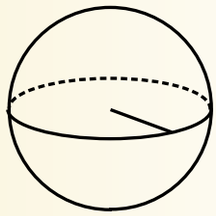
a) Valitse karttapallon pinnalta kaksi paikkakuntaa. Mittaa narun avulla paikkakuntien (lyhin) etäisyys pitkin maanpintaa.

b) Pallo halkaistiin pisteiden A ja B sekä keskipisteen kautta kulkevalla viillolla kahteen yhtä suureen osaan. Laske kuviosta pisteiden A ja B etäisyys pitkin pallon pintaa. Pallon säde on 25 cm.

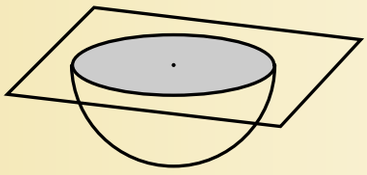


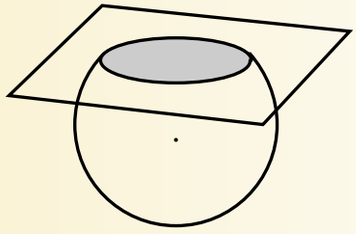
Pallo

Pallo muodostuu niistä avaruuden pisteistä, jotka ovat samalla etäisyydellä (*säde*) kiinteästä pisteestä (*keskipiste*).

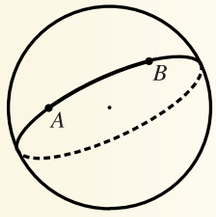


Tason ja pallon leikkauskuvio on ympyrä. Jos taso kulkee pallon keskipisteen kautta, muodostuu *isoympyrä*. Isoympyrän säde on sama kuin pallon säde. Muita ympyröitä, joiden säde on lyhyempi, kutsutaan *pikkuympyröiksi*.

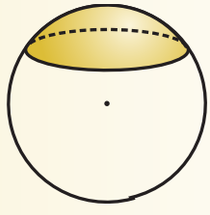




Lyhin reitti paikasta toiseen pallon pinnalla kulkee pitkin paikkojen kautta kulkevaa isoympyrää.



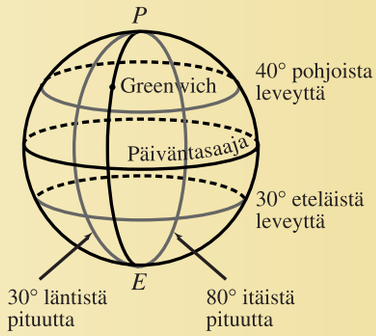
Taso leikkaa pallosta kappaleen, jota kutsutaan *pallosegmentiksi*, ja erottaa pallon pinnasta niin sanotun *kalotin*.



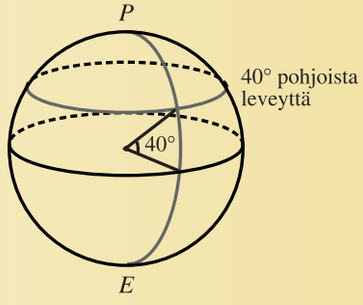
Maapallo

Planeetta Maa on likimain pallon muotoinen, ja monissa käytännön ongelmissa päästään riittävään tarkkuuteen, kun Maata pidetään pallona. Tämän niin sanotun *maapallon* pinnan kartoitus ja mittaukset perustuvat iso- ja pikkuympyröihin. Maapallon isoympyröiden pituus – maapallon ympärysmitta – on noin 40 000 km.*

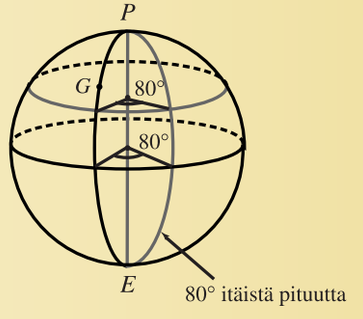
Leveyspiirejä ovat päiväntasaaja ja sen kanssa yhdensuuntaiset pikkuympyrät. *Pituuspiirit* ovat napojen kautta kulkevien isoympyröiden puolikkaita.



Leveyspiirin asteluku on leveyspiirille ja päiväntasaajalle piirrettyjen maapallon säteiden välisen terävän kulman suuruus, kun säteet on piirretty saman napojen kautta kulkevan isoympyrän kehälle.



Peruspituuspiiri eli nollapituuspiiri on Englannissa sijaitsevan Greenwichin kautta kulkeva pituuspiiri. Pituuspiirin asteluku on päiväntasaajan (tai minkä tahansa muun leveyspiirin) keskipisteestä pituuspiirille ja nollapituuspiirille piirrettyjen säteiden välisen koveran kulman suuruus.



---

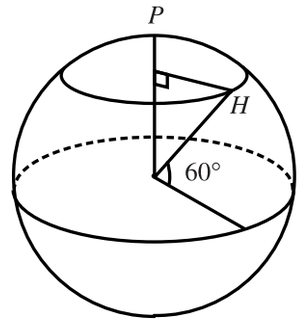
* Maapallon ympärysmitta ei ole sattumalta näin pyöreä luku. Kyseessä on itse asiassa pituusyksikön metri alkuperäinen määritelmä. Yksikön käyttöönotosta päätettiin Ranskan Suuren vallankumouksen aikana. Metrin pituudeksi vahvistettiin vuonna 1795 yksi kymmenesmiljoonasosa Pariisin kautta kulkevan pituuspiirin siitä osasta, joka on pohjoisnavan ja päiväntasaajan välissä. Näin maapallon ympärysmitaksi tuli neljäkymmentä miljoonaa metriä eli 40 000 km. Sittemmin metri on määritelty tarkemmin valon nopeuden avulla. Myös Maan ympärysmitta tiedetään nykyään tarkemmin: napojen kautta mitattu ympärysmitta on 40 008 km ja päiväntasaajan pituus on 40 075 km. Maan olettaminen palloksi, jonka ympärysmitta on 40 000 km, antaa siis oikeita tuloksia yleensä kolmen numeron tarkkuudella.

ESIMERKKI 1

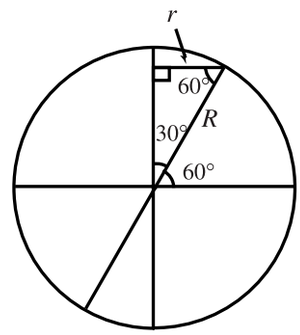
Kulkija lähtee Helsingistä ja kulkee kompassin avulla koko ajan itään. Kuinka pitkän matkan hän on taivaltanut, kun hän saapuu takaisin Helsinkiin? Helsingin sijainti on $60°$ pohjoista leveyttä. Maapallon ympärysmitta on $40\,000$ km.

Ratkaisu

Tehtävänä on laskea $60°$:n leveyspiirin pituus.



Jos maapallo leikataan napojen ja Helsingin kautta kulkevalla tasolla, muodostuu viereinen leikkauskuvio. Kuviossa R on maapallon säde ja r on 60. leveyspiirin säde.



$$\cos 60° = \frac{r}{R} \qquad | \cdot R$$

$$r = R \cos 60°$$

Maapallon säde $R = \dfrac{40\,000}{2\pi}$ (km).

$60°$:n leveyspiirin pituus on

$$p = 2\pi r = 2\pi \cdot R \cos 60° = 2\pi \cdot \frac{40\,000}{2\pi} \cdot \cos 60°$$

$$= 40\,000 \cdot \cos 60° = 20\,000 \text{ (km)}.$$

Vastaus

20 000 km

Pallon tilavuus ja pinta-ala

Pallon tilavuus on

$$V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

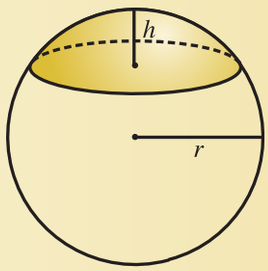
ja pallon pinta-ala

$$A = 4\pi r^2,$$

missä r on pallon säde.

Pallosegmentin tilavuus ja kalotin pinta-ala

Pallosegmentin tilavuus on



$$V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$$

ja kalotin pinta-ala

$$A = 2\pi rh,$$

missä r on pallon säde ja
h on segmentin ja kalotin korkeus.

Pallon ja pallosegmentin tilavuuden kaavat perustellaan integraalilaskennan kurssissa.

Pinta-alan kaavoja ei lukiossa perustella.

ESIMERKKI 2

Miesten kuulantyönnössä käytettävän kuulan painoksi on määrätty 7,257 kg (16 paunaa). Kuula on yleensä terästä tai messinkiä. Kuinka suuri teräksisen kuulan läpimitta on? Teräksen tiheys on $7\,850\ \text{kg/m}^3$.

Ratkaisu

Määritetään kuulan tilavuus. Koska yksi kuutiometri terästä painaa 7 850 kg, niin yksi kuutiodesimetri terästä painaa 7,850 kg. Koska kuula painaa 7,257 kg, kuulan tilavuus on $\frac{7{,}257}{7{,}850}\ \text{dm}^3 \approx 0{,}9245\ \text{dm}^3$.

Ratkaistaan säde pallon tilavuuden kaavasta.

$$\frac{4\pi r^3}{3} = V \qquad \big| \cdot 3$$

$$4\pi r^3 = 3V \qquad \big| : 4\pi$$

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Läpimitta on $2r$. Sijoitetaan tilavuus $V = 0{,}9245\ (\text{dm}^3)$.

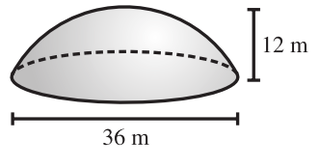
$$2r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0{,}9245}{4\pi}} \approx 1{,}21\ \text{(dm)}$$

Vastaus

12,1 cm

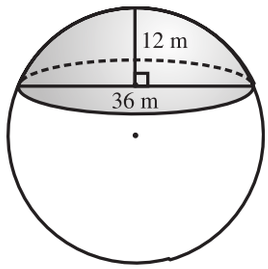
ESIMERKKI 3

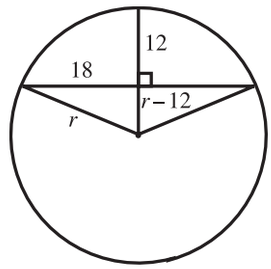
Kuplahalli, jonka leveys on 36 m ja korkeus 12 m, on muodoltaan pallosegmentti. Laske hallin tilavuus ja katon pinta-ala.



Ratkaisu

Täydennetään segmentti palloksi. Segmentin tilavuuden ja kattona olevan kalotin pinta-alan laskemiseksi on määritettävä pallon säde.





Pallon säde ratkaistaan poikkileikkauskuviosta Pythagoraan lauseella,

$$r^2 = (r - 12)^2 + 18^2$$

$$r^2 = r^2 - 24r + 144 + 324$$

$$24r = 468 \qquad | : 24$$

$$r = 19{,}5 \text{ (m)}$$

Hallin tilavuus on

$$V = \pi h^2 (r - \frac{h}{3}) \qquad \text{Sijoitetaan } h = 12 \text{ ja } r = 19{,}5.$$

$$= \pi \cdot 12^2 \cdot (19{,}5 - \frac{12}{3}) \approx 7\,000 \text{ (m}^3\text{)}$$

ja katon pinta-ala

$$A = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 19{,}5 \cdot 12 \approx 1\,500 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Vastaus

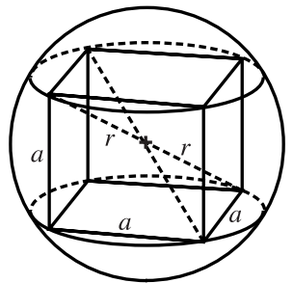
tilavuus 7 000 m^3 ja katon pinta-ala 1 500 m^2

ESIMERKKI 4

Pallon sisään on asetettu kuutio, jonka kaikki kärjet ovat pallon pinnalla.
a) Mikä on kuution särmän pituus, jos pallon säde on r?
b) Mikä on kuution tilavuuden suhde pallon tilavuuteen?

Ratkaisu

a) Yhteys pallon sisään asetetun kuution särmän pituuden ja pallon säteen välillä perustuu havaintoon: Kuution avaruuslävistäjä on pallon halkaisija.



Kuution särmää on merkitty a. Tällöin avaruuslävistäjän pituus on $a\sqrt{3}$.* Siis:

$a\sqrt{3} = 2r \quad | : \sqrt{3}$ Kuution avaruuslävistäjä on pallon halkaisija.

$$a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

b) Kuution tilavuus on

$$V_K = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{2^3 r^3}{(\sqrt{3})^3} = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}.$$

Pallon tilavuus on

$$V_P = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Muodostetaan ja sievennetään kuution tilavuuden suhde pallon tilavuuteen.

$$\frac{V_K}{V_P} = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} : \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4\pi r^3} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\,\overset{1}{\cancel{r^3}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\sqrt{3} \cdot \underset{1}{\cancel{4}}\pi \underset{1}{\cancel{r^3}}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}37$$

Vastaus

a) $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}37$

---

* Nyt käytettiin muistitietoa, jonka mukaan kuution avaruuslävistäjän pituus on särmän pituus kerrottuna luvulla $\sqrt{3}$. Avaruuslävistäjän pituus voidaan myös laskea avaruuden Pythagoraan lauseella: $x^2 = a^2 + a^2 + a^2$, joten $x^2 = 3a^2$ ja $x = \sqrt{3}\,a$.

TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

314. Helsinki ja Botswanan pääkaupunki Gaborone sijaitsevat samalla pituuspiirillä. Helsingin sijainti on 60° pohjoista leveyttä ja Gaboronen 25° eteläistä leveyttä. Mikä on paikkakuntien välinen etäisyys? Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

315. Utsjoki sijaitsee 70. pohjoisella leveyspiirillä. Kulkija lähtee Utsjoelta ja kulkee koko ajan länteen. Kuinka pitkä matka hänellä on takanaan, kun hän saapuu takaisin Utsjoelle? Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

316. Paljonko muovikangasta tarvitaan kattoon, kun rakennetaan puolipallon muotoinen kuplahalli, jonka halkaisija on 17 m?

317. Likipitäen pallon muotoisen kuorimattoman appelsiinin läpimitta on 10,5 cm. Kuoren paksuus on 1,0 cm. Kuinka monta prosenttia appelsiinin tilavuudesta on kuorta?

318. Naisten kuulantyönnössä kuulan painoksi on määrätty 4,000 kg. Kuinka suuri messinkisen kuulan läpimitta on? Messingin tiheys on $8\,400\ \text{kg/m}^3$.

319. Pallon muotoisen öljysäiliön sisäläpimitta on 168,0 cm. Mittatikusta nähdään, että öljyn pinta on 29,1 cm:n korkeudella. Kuinka paljon öljyä säiliössä on?

320. Pohjoisen napapiirin (leveyspiiri 66,6° pohjoista leveyttä) pohjoispuolella olevaa maapallon osaa kutsutaan arktiseksi alueeksi. Kuinka monta prosenttia arktisen alueen pinta-ala on Maan pinta-alasta? Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

321. Puolipallo on mahdutettu mahdollisimman pieneen suorakulmaisen särmiöön.
a) Laske puolipallon tilavuuden suhde särmiön tilavuuteen.
b) Kuinka monta prosenttia särmiön tilavuudesta jää tyhjäksi?

322. Suorakulmaisen särmiön pohja on neliö, jonka sivujen pituus on 8,2 cm. Kuinka korkea särmiö saa olla, jotta se mahtuisi palloon, jonka halkaisija on 14,0 cm?

323. Kuution sisään asetettu pallo on pallo, joka sivuaa kuution kaikkia tahkoja. Kuution ympäri asetettu pallo on pallo, joka kulkee kuution kaikkien kärkien kautta.
a) Kuution sivun pituus on a. Määritä kuution sisään ja ympäri asetettujen pallojen säteet. Mikä on kuution sisään ja ympäri asetettujen pallojen
b) säteiden
c) pinta-alojen
d) tilavuuksien
suhde?

324. Maapallon ympärysmitan määritti ensimäisenä kreikkalainen Eratostenes noin 200 eKr. Hän käytti hyväkseen seuraavia havaintoja: Samaan aikaan, kun Aurinko oli zeniitissä (keskellä taivasta) Syenessä (nykyinen Assuan), se näkyi Aleksandriassa suoraan etelässä 7°12′ zeniitin alapuolella. Aleksandria sijaitsee 5 000 stadionia pohjoiseen Syenestä. Stadion oli kreikkalainen pituuden yksikkö, yksi stadion on 165 metriä. Laske näiden havaintojen perusteella maapallon ympärysmitta kilometreinä.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

325. a) Kuinka pitkällä matkalla leveyspiiri muuttuu yhden asteen, kun kuljetaan suoraan etelään tai pohjoiseen?
b) Jos kierretään maapallo lähtemällä Helsingistä suoraan etelään, matkalla kohdataan järjestyksessä seuraavan taulukon paikkakunnat. Laske, kuinka pitkä matka on kuljettu paikkakunnalle saavuttaessa. Käytä hyväksesi a-kohtaa.

paikkakunta	leveyspiiri	kuljettu matka (km)
Helsinki	60° pohj.	0
Kairo	30° pohj.	
Lusaka	15° etel.	
Etelänapa	90° etel.	
Cookin saaret	20° etel.	
Honolulu	20° pohj.	
Pohjoisnapa	90° pohj.	
Helsinki		40 000

c) Mikä on Honolulun etäisyys Helsingistä?

326. Peking, Madrid ja New York sijaitsevat samalla leveyspiirillä 41° pohjoista leveyttä. Peking sijaitsee pituuspiirillä 115° itäistä pituutta, Madrid 4° läntistä pituutta ja New York 74° läntistä pituutta. Kuinka pitkä matka on kaupungista toiseen, jos matka tehdään kompassin avulla kulkemalla koko ajan itään tai länteen? Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

327. Sääsatelliitti ylittää juuri Pohjoisnavan 1 200 kilometrin korkeudella. Mille leveyspiirille satelliitin näkyvyysalue ulottuu? Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

328. a) Kuinka monta litraa ilmaa on pallon muotoisessa ilmapallossa, jonka läpimitta on 25 cm?
b) Kuinka monta litraa palloon pitää puhaltaa lisää ilmaa, jotta läpimitaksi tulisi 35 cm?

329. Pallon pinta-ala on 1,00 dm^2. Mikä pallon tilavuus on?

330. Pallon muotoisesta melonista, jonka halkaisija on 18,2 cm ja paino 3,10 kg, leikataan 5,0 cm:n paksuinen segmentti. Kuinka paljon segmentti painaa?

331. Maahan pudonnut pallo teki tasaiseen hiekkaan kuopan, jonka leveys on 20 cm ja syvyys 5,0 cm. Mikä kuopan tilavuus on?

332. Televisiosatelliitti Astra on 36 000 km:n korkeudella niin sanotulla geostationaarisella radalla, eli se pysyttelee koko ajan saman päiväntasaajan kohdan yläpuolella. Kuinka monta prosenttia Maan pinnasta satelliitin näkyvyysalue on? Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

333. Puolipallon sisällä on kuutio, jonka yksi tahko on puolipallon pohjaympyrällä ja vastakkaisen tahkon kärjet puolipallon pinnalla. Pallon säde on r. Laske
a) kuution särmän pituus
b) kuution tilavuuden suhde puolipallon tilavuuteen.

334. a) Katsojan etäisyys pallosta on kaksi pallon sädettä. Kuinka suuren osan pallon pinnasta katsoja näkee?
b) Millä etäisyydeltä pallosta katsojan tulee olla, jotta hän näkisi tasan neljäsosan pallon pinnasta?

335. Pallo kulkee kuution yhden tahkon kärkipisteiden kautta ja sivuaa vastakkaista tahkoa. Määritä pallon säde, kun kuution särmän pituus on a.

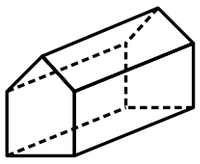
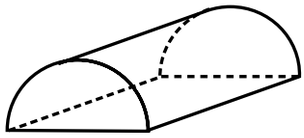
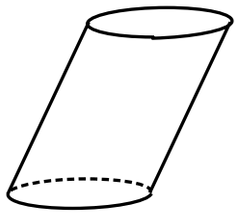
336. Aluksen paikan määritys merellä perustui ennen Auringon ja tähtien havainnointiin. Pohjoisella pallonpuoliskolla leveyspiiri osattiin määrittää jo varhain käyttämällä hyväksi Pohjantähteä, joka on jokseenkin tarkkaan pohjoisnavan yläpuolella. Pituuspiirin määrittäminen sen sijaan edellytti ajanmääritystä, mikä varsinkin tiimalasien aikana oli epätarkkaa. Seuraavat havainnot tehtiin purjelaivasta, joka heikossa tuulessa oli jokseenkin paikallaan:
Yöllä Pohjantähti näkyi $23°$ horisontin yläpuolella. Seuraavana päivänä aurinko oli etelässä kello 4.08 iltapäivällä Greenwichin aikaa. Määritä ensimmäisen havainnon avulla laivan sijaintipaikan leveyspiiri ja toisen havainnon avulla sijaintipaikan pituuspiiri.

337. Ivalosta lähdettiin lentokoneella ihailemaan revontulia. Ensin lennettiin 500 km pohjoiseen, sitten 500 km länteen, sitten 500 km etelään ja lopuksi 500 km itään. Polttoaineen loputtua jouduttiin laskeutumaan järven jäälle. Missä nyt oltiin? Lähtöpaikka Ivalossa oli leveyspiirillä $68°36'$ pohjoista leveyttä.

338. Peking ja Madrid sijaitsevat samalla leveyspiirillä $41°$ pohjoista leveyttä. Peking sijaitsee pituuspiirillä $115°$ itäistä pituutta ja Madrid pituuspiirillä $4°$ läntistä pituutta. Mikä on Pekingin ja Madridin (lyhin) etäisyys? Vertaa tulosta tehtävässä 326 laskettuun matkaan pitkin 41. pohjoista leveyspiiriä.

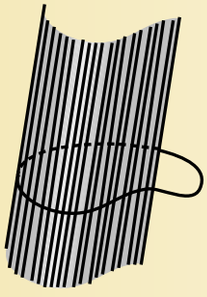
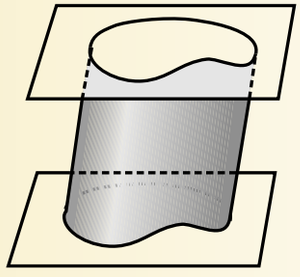
Lieriö

Ongelma Mitä yhteistä kuvien kappaleilla on?

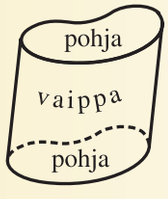




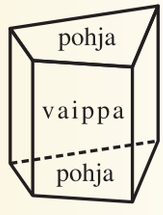
Lieriö

Jos suora liikkuu pitkin umpinaista viivaa, joka ei leikkaa itseään, ja jos suora säilyttää koko ajan suuntansa, muodostuu *lieriöpinta*. Kun lieriöpinta leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla, syntyy *lieriö*.

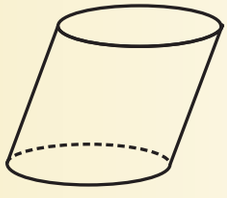
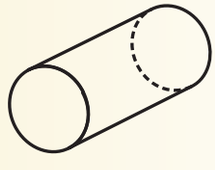



Lieriöllä on *vaippa* sekä kaksi keskenään yhtenevää ja yhdensuuntaista *pohjaa*.

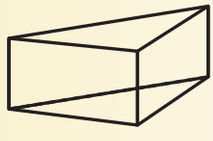
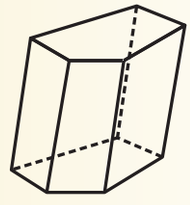




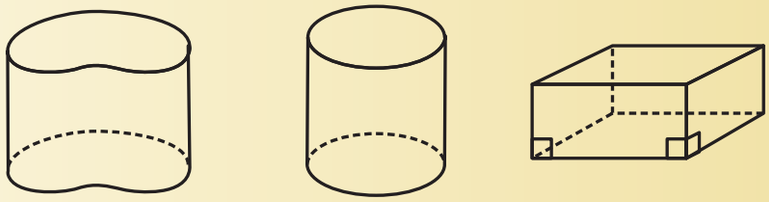
Ympyrälieriön pohja on ympyrä.

Lieriöstä, jonka pohja on monikulmio, käytetään myös nimitystä *särmiö*.

Lieriö, jonka vaippa on kohtisuorassa pohjaa vastaan, on *suora lieriö*.

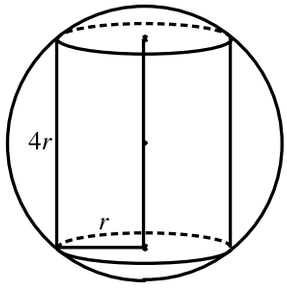


ESIMERKKI 1

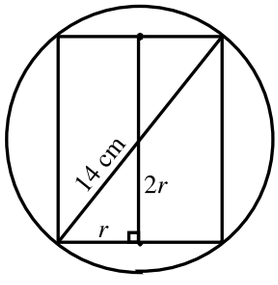
Metallipallosta, jonka läpimitta on 28,0 cm, sorvataan mahdollisimman suuri sellainen suora ympyrälieriö, jonka korkeus on kaksi kertaa niin suuri kuin pohjan halkaisija. Kuinka suuri lieriön pohjan halkaisija on?

Ratkaisu

Suurimman ympyrälieriön pohjaympyröiden kehät ovat pallon pinnalla, ja pohjaympyröiden keskipisteitä yhdistävä ympyrälieriön *akseli* kulkee pallon keskipisteen kautta. Merkitään pohjaympyrän sädettä r, jolloin lieriön korkeus on $4r$.



Kappaleet leikataan lieriön akselin kautta kulkevalla tasolla.



Säde r ratkaistaan Pythagoraan lauseella.

$$r^2 + (2r)^2 = 14^2$$

$$r^2 + 4r^2 = 14^2$$

$$5r^2 = 14^2 \qquad | : 5$$

$$r^2 = \frac{14^2}{5}$$

$$r = \frac{14}{\sqrt{5}}$$

Pohjan halkaisija on $2r = 2 \cdot \frac{14}{\sqrt{5}} \approx 12{,}5$ (cm).

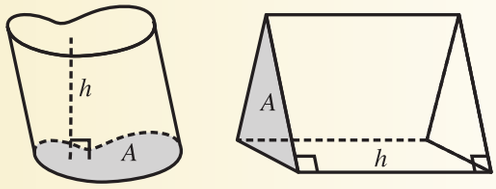
Vastaus

12,5 cm

Lieriön tilavuus

Lieriön tilavuus on lieriön pohjan pinta-alan ja lieriön korkeuden tulo.

$$V = A \cdot h$$



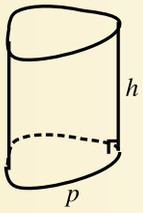
A on lieriön pohjan pinta-ala
h on lieriön korkeus

Kaava perustellaan myöhemmin integraalilaskennan kurssissa.

Suoran lieriön vaipan pinta-ala

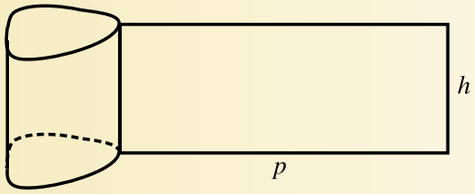
Suoran lieriön vaipan pinta-ala on lieriön pohjan piirin ja lieriön korkeuden tulo.

$$A = ph$$



p on lieriön pohjan piiri
h on lieriön korkeus

Perustelu. Jos suoran lieriön vaippa leikataan auki pohjaa vastaan kohtisuoraan ja levitetään tasoon, muodostuu suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat lieriön pohjan piiri p ja lieriön korkeus h. Suorakulmion pinta-ala on $A = ph$.



ESIMERKKI 2

Tasakattoisen huoneen korkeus on 3,45 m. Huoneen lattiapinta-ala on 28,3 m^2, ja huoneen katon kiertää 35,8 m pitkä koristelista. Laske huoneen tilavuus ja seinäpinta-ala.

Ratkaisu

Lattian muodosta riippumatta huonetila on suora lieriö.
Tilavuus on pohjan pinta-alan ja korkeuden tulo.

$V = A \cdot h = 28{,}3\ \text{m}^2 \cdot 3{,}45\ \text{m} \approx 97{,}6\ \text{m}^3$

Seinäpinta-ala on pohjan piirin ja korkeuden tulo.

$A = ph = 35{,}8\ \text{m} \cdot 3{,}45\ \text{m} \approx 124\ \text{m}^2$

Vastaus

tilavuus 97,6 m^3, seinäpinta-ala 124 m^2

ESIMERKKI 3

Pellistä valmistetaan litran vetoinen suoran ympyrälieriön muotoinen kanneton mitta-astia. Kuinka paljon peltiä tarvitaan, jos astian pohjan halkaisijaksi valitaan 10,0 cm?

Ratkaisu

On laskettava lieriön pohjan ja vaipan pinta-alojen summa.

Vaipan pinta-alan laskemiseksi määritetään lieriön korkeus.

$A_P \cdot h = V \quad | : A_P$ Tilavuus on pohjan pinta-alan ja korkeuden tulo.

$$h = \frac{V}{A_P}$$ Sijoitetaan $A_P = \pi r^2$.

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$ Sijoitetaan pohjan säde 5 cm ja lieriön tilavuus $1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3 = 1\ 000\ \text{cm}^3$.

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot 5^2} = \frac{40}{\pi} \ \text{(cm)}$$

Vaipan pinta-ala on

$A_V = \pi d \cdot h$ Pohjan piirin ja korkeuden tulo.

$$= \pi \cdot 10 \cdot \frac{40}{\pi} = 400 \ (\text{cm}^2).$$

Pohjan pinta-ala on

$A_P = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \ (\text{cm}^2).$

Pellin tarve on

$A_V + A_P = 400 + 25\pi \approx 479 \ (\text{cm}^2).$

Vastaus

479 cm^2

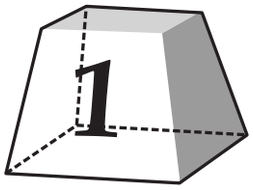
TEHTÄVIÄ

SARJA I. PERUSTEHTÄVIÄ

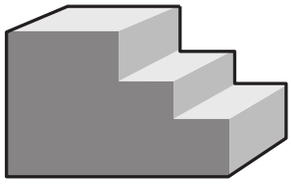
339. Onko kappale lieriö? Jos kappale on lieriö, niin millainen kuvio lieriön pohja on?

a)

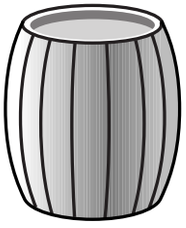
b)



c)



d)



340. Metallipallosta, jonka läpimitta on 28,0 cm, sorvataan mahdollisimman suuri suora ympyrälieriö, jonka korkeus ja pohjan halkaisija ovat yhtä suuret. Kuinka suuri lieriön pohjan halkaisija on?

341. Salin ympärysmitta on 28 m ja korkeus 3,7 m. Ikkunoiden ja ovien yhteenlaskettu pinta-ala on 12 m^2. Mikä on maalattavan seinäpinnan ala?

342. Tasakattoisen omakotitalon katon pinta-ala on 120 m^2. Ukkoskuuron aikana vettä satoi 4,1 mm. Kuinka monta litraa vettä talon katolle satoi?

343. Puistoa rakennettaessa kaivetaan 60 m pitkä oja, jonka tasainen pohja on 10 cm leveä ja 80 cm:n syvyydellä maanpinnasta ja jonka sivuseinämät ovat 40°:n kulmassa vaakatasoon nähden. Kuinka monta kuutiometriä maata ojaa kaivettaessa poistetaan?

344. Suoran ympyrälieriön muotoiseen mittalasin pohjan halkaisija on 3,0 cm. Lasiin on kaiverrettava viiva 4 cl:n kohdalle. Määritä viivan paikka.

345. Pellistä valmistetaan suoran ympyrälieriön muotoinen 10,0 cm korkea yhden litran vetoinen kannellinen tölkki. Kuinka paljon peltiä tarvitaan?

346. Kerällä on 1,5 mm:n paksuista kuparilankaa, jonka poikkileikkaus on ympyrän muotoinen. Kerä painaa 340 g. Kuinka monta metriä lankaa kerässä on? Kuparin tiheys on 8 960 kg/m^3.

347. Öljysäiliö on vaipallaan vaakasuorassa asennossa makaava suora ympyrälieriö. Säiliön pääty-ympyröiden halkaisija on 1,6 m ja säiliön pituus 3,5 m. Mittatikulla mitataan säiliössä olevan öljykerroksen syvyydeksi 50 cm. Kuinka monta litraa öljyä säiliössä on?

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

348. Puolipallon muotoisen astian halkaisija on 24,4 cm. Kuinka korkea suora ympyrälieriö, jonka pohjan halkaisija on 12,0 cm, mahtuu pystyasennossa astiaan?

349. Neliöpohjaiseen suorakulmaiseen särmiöön on mahdutettu mahdollisimman suuri samankorkuinen suora ympyrälieriö. Mikä on ympyrälieriön tilavuuden suhde särmiön tilavuuteen? Määritä suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin sadasosan tarkkuudella.

350. Ilmastointiputken poikkileikkaus on ympyrä, jonka halkaisija on 8,0 cm. Ilma virtaa putkessa nopeudella 1,4 m/s. Kuinka monta kuutiometriä ilmaa virtaa huoneeseen kymmenessä minuutissa?

351. Suoran ympyrälieriön muotoiseen mittalasiin, jonka sisähalkaisija on 2,0 cm, kerääntyy sadevesi suppilosta, jonka ympyrän muotoisen suuaukon halkaisija on 34 cm. Vuorokauden aikana mittalasiin kertyi 18,5 cm korkea vesikerros. Kuinka monta millimetriä vettä vuorokauden aikana satoi?

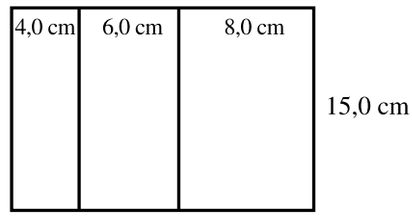
352. Kun lieriön muotoiseen astiaan kaadettiin 5,0 litraa vettä, vedenpinta astiassa nousi 6,4 cm. Kun astiaan upotettiin metallipallo, vedenpinta nousi vielä 2,0 cm. Mikä oli pallon säde?

353. Suoran ympyrälieriön muotoisen astian pohjan halkaisija on 10,0 cm ja korkeus tätä suurempi. Astian pohjalle asetetaan pallo, jonka halkaisija on 8,0 cm. Kuinka paljon nestettä astiaan pitäisi kaataa, jotta pallo juuri ja juuri peittyisi?

354. Karjan juottoallas on 4,8 metriä pitkä. Altaan pituutta vastaan kohtisuora poikkileikkaus on 36 cm leveä puoliympyrä. Paljonko altaassa on vettä, kun altaan korkeudesta puolet on veden peitossa?

355. Suoran ympyrälieriön muotoisen öljysäiliön tilavuus on 250 m^3. Säiliön sivukuva etäältä katsottaessa on neliö. Määritä säiliön mitat.

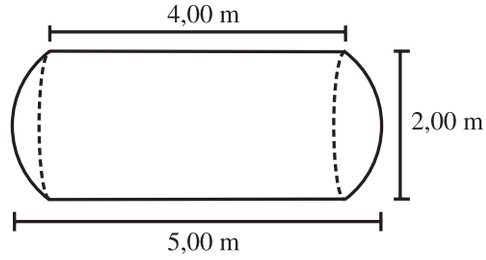
356. Pahvi taitetaan merkityistä kohdista suoran kolmisivuisen särmiön vaipaksi. Kuinka suuri särmiön tilavuus on?



357. Pallon halkaisija on 12,0 cm. Pallon sisällä on mahdollisimman suuri 8,0 cm korkea suora särmiö, jonka pohja on säännöllinen kuusikulmio. Kuinka monta prosenttia särmiön tilavuus on pallon tilavuudesta?

358. Pallon halkaisija on 30. Pallon läpi porataan pitkin pallon halkaisijaa reikä, jonka halkaisija on 18. Laske pallosta jäljelle jäävän osan tilavuus.

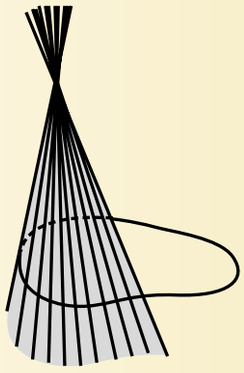
359. Kappale muodostuu suorasta ympyrälieriöstä ja kahdesta samanlaisesta pallosegmentistä. Laske kappaleen tilavuus ja kokonaispinta-ala.

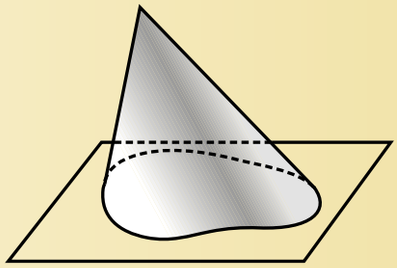


Kartio

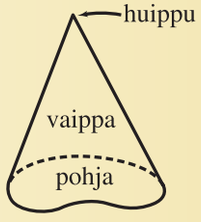
Kartio

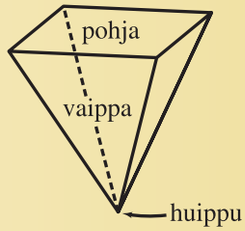
Kun suora liikkuu pitkin umpinaista viivaa, joka ei leikkaa itseään, ja kulkee koko ajan saman pisteen kautta, muodostuu *kartiopinta*. Kun kartiopinta leikataan tasolla, taso ja kartiopinta rajaavat *kartion*.



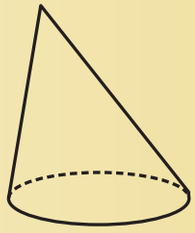


Kartiolla on *pohja*, *huippu* ja *vaippa*.

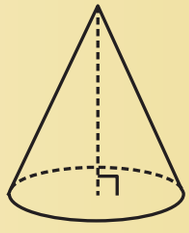




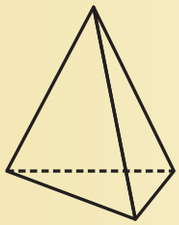
Ympyräkartion pohja on ympyrä.



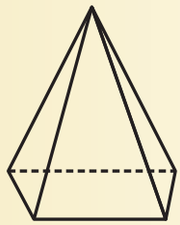
Suoran ympyräkartion huipusta pohjalle piirretty korkeusjana kohtaa pohjaympyrän sen keskipisteessä.



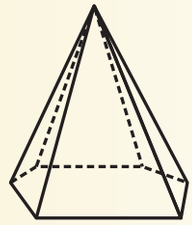
Pyramidi on kartio, jonka pohja on monikulmio.



kolmisivuinen pyramidi

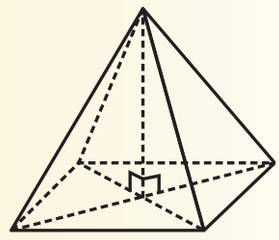


nelisivuinen pyramidi



kuusisivuinen pyramidi

Pyramidi on *säännöllinen*, jos pyramidin pohja on säännöllinen monikulmio ja jos huipusta pohjalle piirretty korkeusjana kohtaa pohjamonikulmion sen keskipisteessä.

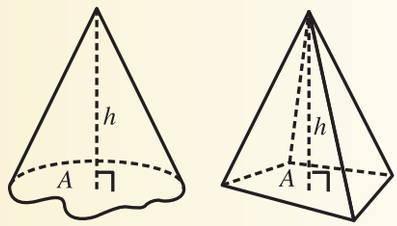


säännöllinen nelisivuinen pyramidi

Kartion tilavuus

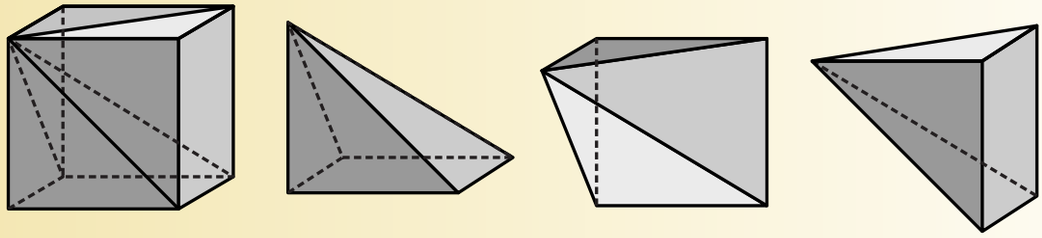
Kartion tilavuus on kolmasosa sellaisen lieriön tilavuudesta, jolla on sama pohja ja sama korkeus kuin kartiolla. Kartion tilavuus on siis kolmasosa pohjan pinta-alan ja korkeuden tulosta.

$$V = \frac{A \cdot h}{3}$$

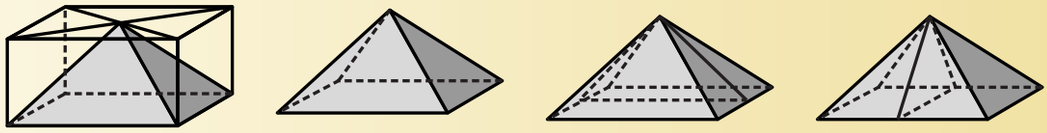


A on kartion pohjan pinta-ala
h on kartion korkeus

Kartion tilavuuden kaava todistetaan integraalilaskennan kurssissa. Joissakin erikoistapauksissa kaavan voi perustella havainnollisesti:



Kuutio voidaan sahata kolmeksi samanlaiseksi pyramidiksi. Pyramidien pohja on kuution tahko ja korkeus kuution korkeus.



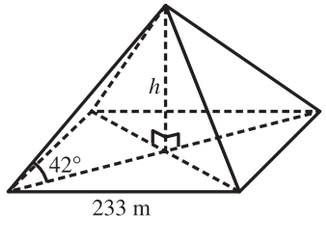
Suorakulmainen särmiö, jonka pohja on neliö ja korkeus puolet pohjasärmän pituudesta, voidaan paloitella niin, että osista muodostuu kolme samanlaista pyramidia.

ESIMERKKI 1

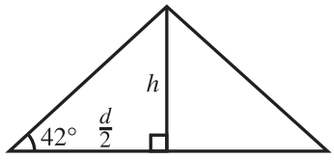
Kheopsin pyramidin korkeus ja tilavuus laskettiin seuraavien maasta tehtyjen mittausten avulla. Pohjasärmän pituudeksi mitattiin 233 metriä ja sivusärmän ja maanpinnan välisen kulman suuruudeksi 42°. Laske Kheopsin pyramidin korkeus ja tilavuus. Kheopsin pyramidi on säännöllinen nelisivuinen pyramidi.

Ratkaisu

Kheopsin pyramidin pohja on neliö. Huipusta pohjalle piirretty korkeusjana kohtaa pohjaneliön sen keskipisteessä. Sivusärmän ja pohjan välinen kulma on sivusärmän ja pohjan lävistäjän välinen kulma.*



Kun pyramidi halkaistaan pohjan lävistäjän ja huipun kautta kulkevalla tasolla, leikkauskuvio on tasakylkinen kolmio. Kolmion kyljet ovat pyramidin sivusärmiä, kolmion kanta on pohjaneliön lävistäjä ja kantakulma sivusärmän ja pohjan välinen kulma.



Ratkaistaan pyramidin korkeus suorakulmaisesta kolmiosta.

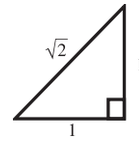
---

* Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohja piirretään kavaljeeriperspektiivissä ja korkeusjana, jos sen pituus tiedetään, piirretään oikeassa mittasuhteessa.

Pohjaneliön lävistäjän pituus on

$d = 233 \cdot \sqrt{2}$ (m),

Muistikolmio*



joten lävistäjän puolikas on

$$\frac{d}{2} = \frac{233 \cdot \sqrt{2}}{2} \approx 164{,}76 \text{ (m)}.$$

Ratkaistaan pyramidin korkeus.

$$\tan 42° = \frac{h}{164{,}76} \qquad \big| \cdot 164{,}76$$

$$h = 164{,}76 \cdot \tan 42° \approx 148{,}35 \text{ (m)}$$

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{A \cdot h}{3}$$

Kolmasosa pohjan pinta-alan ja korkeuden tulosta.

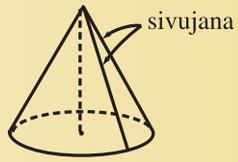
$$\approx \frac{233^2 \cdot 148{,}35}{3} \approx 2\,680\,000 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Vastaus korkeus 148 m, tilavuus 2 680 000 m^3

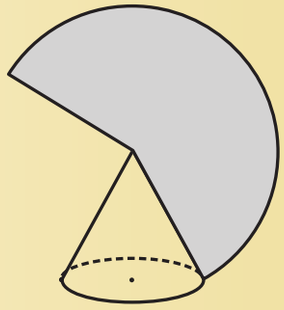
* Lävistäjän pituus voidaan laskea myös Pythagoraan lauseella:
$d^2 = 233^2 + 233^2$ jne.

Suora ympyräkartio

Suoran ympyräkartion huipusta pohjaympyrän kehälle piirretty jana on suoran ympyräkartion *sivujana*. Sivujanan pituus ei riipu siitä, mihin kehän pisteeseen se piirretään.



Kun suoran ympyräkartion vaippa leikataan auki pitkin sivujanaa, vaippa avautuu ympyränsektoriksi. Sektorin säde on kartion sivujana, ja sektorin kaari muodostuu kartion pohjaympyrän kehästä. Laskemalla sektorin pinta-ala saadaan seuraava suoran ympyräkartion vaipan pinta-alan kaava.



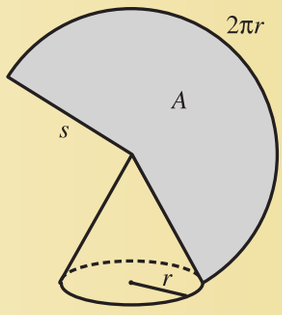
Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala

Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala on

$$A = \pi rs,$$

missä r on kartion pohjan säde ja s on kartion sivujana.

Todistus. On laskettava, kuinka suuri pinta-ala on s-säteisen ympyrän sektorilla, jonka kaaren pituus on $2\pi r$.



Samaan ympyrään piirretyn sektorin pinta-ala ja sektorin kaaren pituus ovat suoraan verrannolliset. Sektorin pinta-alan A suhde koko ympyrän pinta-alaan πs^2 on siis yhtä suuri kuin kaaren pituuden $2\pi r$ suhde koko ympyrän kehän pituuteen $2\pi s$. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan A.

$$\frac{A}{\pi s^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2\pi} r}}{\underset{1}{\cancel{2\pi} s}}$$

$$\frac{A}{\pi s^2} = \frac{r}{s} \qquad \Big| \cdot \pi s^2$$

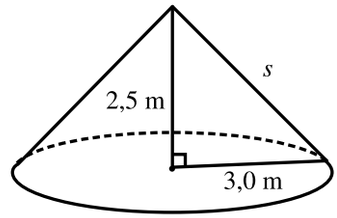
$$A = \frac{\pi \overset{s}{\cancel{s^2}} \cdot r}{\underset{1}{\cancel{s}}} = \pi rs \quad \text{m.o.t.}$$

ESIMERKKI 2

Kuinka monta neliömetriä kangasta tarvitaan 2,5 m korkean ja 6,0 m leveän suoran ympyräkartion muotoisen teltan kattoon?

Ratkaisu

Ratkaistaan sivujanan pituus suorakulmaisesta kolmiosta.



$s^2 = 3^2 + 2{,}5^2$

$s^2 = 15{,}25$

$s = \sqrt{15{,}25}$

Vaipan pinta-ala

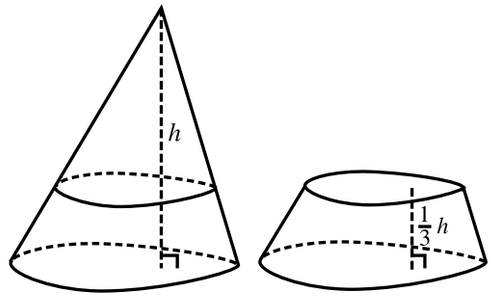
$A = \pi rs = \pi \cdot 3{,}0 \cdot \sqrt{15{,}25} \approx 37 \ \ (\text{m}^2)$.

Vastaus

37 m^2

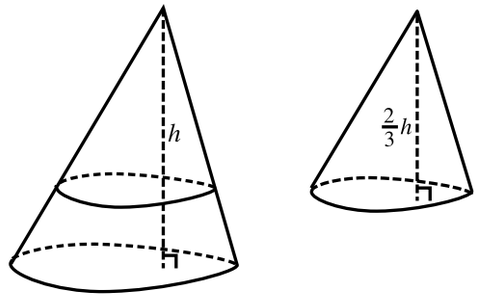
ESIMERKKI 3

Kun kartio katkaistaan pohjan suuntaisella tasolla, saadaan *katkaistu kartio*. Mikä osa koko kartion tilavuudesta on katkaistun kartion tilavuus, jos sen korkeus on kolmasosa koko kartion korkeudesta?



Ratkaisu

Pois leikattu kartio on yhdenmuotoinen koko kartion kanssa. Yhdenmuotoisuussuhde on kartioiden korkeuksien suhde $\frac{2}{3}$.



Lasketaan pois leikatun kartion tilavuuden suhde koko kartion tilavuuteen. Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on yhdenmuotoisuussuhteen kuutio.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Katkaistun kartion tilavuuden suhde koko kartion tilavuuteen on

$$1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}.$$

Vastaus

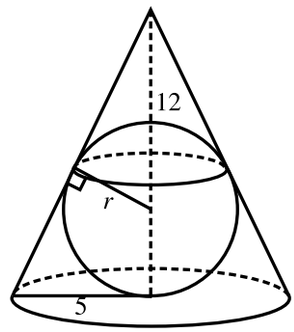
$$\frac{19}{27} \approx 0{,}70$$

ESIMERKKI 4

Suoraan ympyräkartioon, jonka korkeus on 12 ja pohjaympyrän säde 5, on mahdutettu mahdollisimman suuri pallo. Määritä pallon säde.

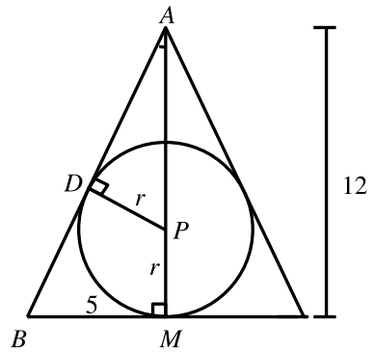
Ratkaisu

Suurimman mahdollisen pallon keskipiste on kartion korkeusjanalla. Pallo sivuaa kartion pohjaa pohjan keskipisteessä ja kartion vaippaa. Pallon sädettä on merkitty r.



Leikataan kartio ja pallo kartion korkeusjanan kautta kulkevalla tasolla.

Tasakylkisen kolmion sisään piirretyn ympyrän säde r määritetään käyttämällä hyväksi suorakulmaisten kolmioiden ABM ja APD yhdenmuotoisuutta (kk).



Sivu AB ratkaistaan Pythagoraan lauseella.

$$|AB|^2 = 5^2 + 12^2$$

$$|AB| = 13$$

Toisiaan vastaavien janojen pituuksien suhteet ovat yhtä suuret:

$$\frac{PD}{BM} = \frac{AP}{AB}$$

$$\frac{r}{5} = \frac{12 - r}{13} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$13r = 60 - 5r$$

$$18r = 60 \qquad \big| : 18$$

$$r = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Vastaus

$3\frac{1}{3}$

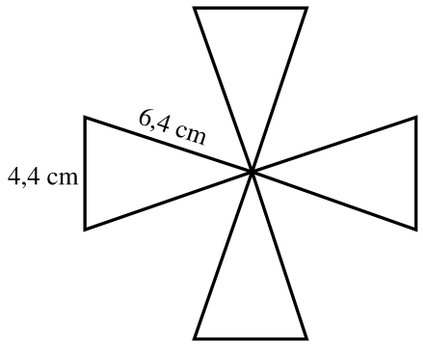
TEHTÄVIÄ

SARJA I.
PERUSTEHTÄVIÄ

360. Muurahaiskeko on likimain kartion muotoinen. Keon korkeus on 1,7 m, ja keko peittää 6,3 m^2:n suuruisen maa-alueen. Laske keon tilavuus.

361. Säännöllisen kuusisivuisen pyramidin pohjasärmien pituus on 10 cm ja sivusärmien pituus 13 cm. Laske pyramidin vaipan pinta-ala.

362. Kuviossa on pyramidin vaippa auki leikattuna ja tasoon levitettynä. Laske
a) pyramidin tilavuus
b) pyramidin sivutahkon ja pohjan välisen kulman suuruus.

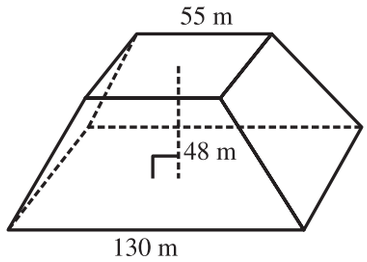


363. Suoran ympyräkartion pohjan säde on 4,3 cm. Kartion sivujanan ja pohjan välisen kulman suuruus on 63°. Laske kartion tilavuus ja vaipan pinta-ala.

364. Pahvisesta ympyrästä, jonka säde on 15,0 cm, leikataan 240°:n sektori. Sektori kiedotaan suoran ympyräkartion vaipaksi. Laske kartion
a) pohjan säde
b) tilavuus.

365. Kuohuviinilasi on suoran ympyräkartion muotoinen. Lasiin mahtuu 16 senttilitraa viiniä.
a) Lasi täytetään puoliväliin. Paljonko lasissa on viiniä?
b) Lasiin kaadetaan 12 senttilitraa viiniä. Montako prosenttia nestekerroksen korkeus on lasin koko korkeudesta?

366. Pyramidin rauniota rajoittavien yhdensuuntaisten neliöiden sivut ovat 130 m ja 55 m. Raunion korkeus on 48 m. Määritä
a) pyramidin alkuperäinen korkeus
b) raunion tilavuus.



367. Suoran ympyräkartion sivujanan pituus on 17 ja pohjan halkaisija 16. Määritä suurimman kartioon mahtuvan pallon säde.

368. Suoran ympyräkartion korkeus on 24 ja pohjan säde 10. Kartion sisällä on suora ympyrälieriö, jonka toinen pohjaympyrä on kartion pohjalla ja toinen kartion vaipalla. Lieriön korkeus on 16. Mikä on lieriön pohjaympyrän säde?

369. Pöydälle on asetettu neljä tennispalloa, jotka sivuavat toisiaan niin, että keskipisteet muodostavat neliön. Pallojen keskelle asetetaan viides tennispallo. Laske muodostuvan keon korkeus. Tennispallojen halkaisija on 6,6 cm.

SARJA II.
PERUSTEHTÄVIÄ JA VAATIVAMPIA TEHTÄVIÄ

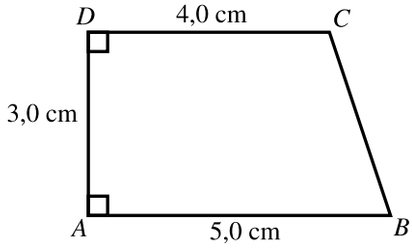
370. Kolmisivuisen pyramidin pohja on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 7,4 cm. Pyramidin korkeus on 12,5 cm. Kuinka suuri pyramidin tilavuus on?

371. Talon katto on muodoltaan säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Katon pituus ja leveys ovat 16 m, ja lappeiden kaltevuuskulma on 17°. Laske katon pinta-ala.

372. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoisen teltan tukikehikko muodostuu neljästä teltan huipussa yhteen liitetystä 2,5 m:n pituisesta kepistä. Teltan korkeus on 2,0 m. Kuinka paljon kangasta teltan kattoon tarvitaan?

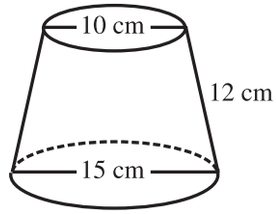
373. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on puolitoista kertaa niin suuri kuin pohjasärmän pituus. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella a) sivutahkon ja pohjan b) sivusärmän ja pohjan c) sivusärmän ja pohjasärmän välinen kulma.

374. Kuvan mukainen puolisuunnikas pyörähtää sivun CD ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus ja kokonaispinta-ala.



375. Suoran ympyräkartion muotoisen lasipikarin vetoisuus on 10 cl ja sen sivujanan pituus on 8,6 cm. Pikariin on kaiverrettava viivat 4 cl:n ja 8 cl:n kohdalle. Määritä viivojen paikat.

376. Laske katkaistun ympyräkartion a) vaipan pinta-ala b) tilavuus.

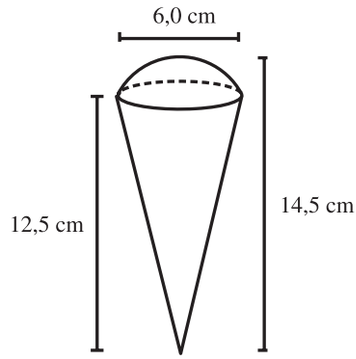


377. Karsittu puun runko on muodoltaan suora ympyräkartio. Rungon pituus on 24 m ja läpimitta tyvessä 48 cm. Rungosta veistetään mahdollisimman pitkä suoran ympyrälieriön muotoinen pölkky, jonka poikkileikkauksen halkaisija on 32 cm. Kuinka pitkä pölkky tukista saadaan?

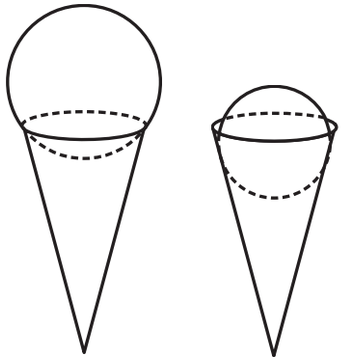
378. Suoran neliöpohjaisen pyramidin korkeus on 60 ja pohjaneliön sivu 22. Mikä on suurimman pyramidiin mahtuvan pallon säde?

379. Suoran ympyräkartion pohjaympyrä ja huippu ovat pallon pinnalla. Ympyräkartion korkeus on kolme neljäsosaa pallon halkaisijasta. Laske ympyräkartion tilavuuden suhde pallon tilavuuteen.

380. Jäätelötuutti muodostuu suorasta ympyräkartiosta ja pallosegmentistä. Määritä tuutin tilavuus desilitroina.



381. Kun pallo asetetaan suoran ympyräkartion muotoiseen tötteröön, niin pallon ja tötterön koosta riippuen pallo jää tötterön suuaukon varaan tai tukeutuu kartion vaippaan suuaukon alapuolella.

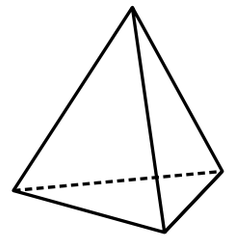


Oletetaan, että tötterön korkeus on 15 ja suuaukon halkaisija 16.
a) Kuinka pitkä pallon halkaisija d on, jos pallo jää suuaukon varaan?
Kuinka suuri osa pallon tilavuudesta on tötterön sisällä, jos pallon halkaisija on b) 20 c) 16?

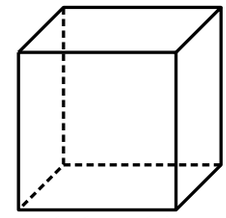
382. a) Ympyränsektori, jonka keskuskulma on 240°, kiedotaan suoran ympyräkartion vaipaksi. Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella kartion huippukulma (kahden vastakkaisen sivujanan välinen kulma).
Kuinka suuri sektorin keskuskulman tulee olla, jotta kartion huippukulma olisi b) 60°
c) 90°?

383. Neliön muotoisesta pellinpalasta, jonka sivun pituus on a, leikataan neliön kärki keskipisteenä piirretty neljännesympyrä, joka kiedotaan suoran ympyräkartion vaipaksi. Kuinka suuri neljännesympyrän säde saa enintään olla, jotta kartion pohja voitaisiin leikata samasta pellistä?

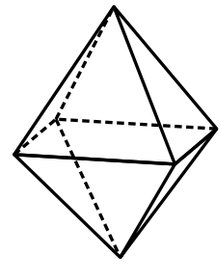
384. Kappale, jonka toisiaan leikkaavat tasot rajaavat avaruuteen, on *monitahokas*. Monitahokkaan kaikki tahkot ovat monikulmioita. Lieriöistä ovat monitahokkaita särmiöt ja kartioista pyramidit. Monitahokas on *säännöllinen*, jos sen kaikki tahkot ovat keskenään yhteneviä säännöllisiä monikulmioita ja jos kaikki vierekkäisten tahkojen väliset kulmat ovat yhtä suuret. Jo antiikin kreikkalaiset osoittivat, että säännöllisiä monitahokkaita on vain viisi (ns. *Platonin kappaleet*).



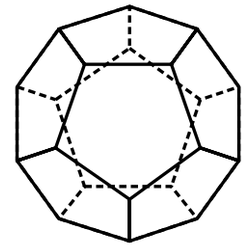
tetraedri



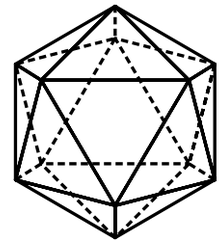
heksaedri
(kuutio)



oktaedri



dodekaedri



ikosaedri

a) Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella säännöllisen nelitahokkaan (tetraedrin) ja säännöllisen kahdeksantahokkaan (oktaedrin) kahden vierekkäisen tahkon välinen kulma.
b) Määritä tetraedrin ja oktaedrin pinta-ala ja tilavuus, kun tahokkaan särmien pituus on a.

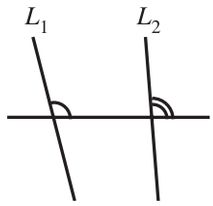
Kertaus

Tässä luvussa kerrataan koko kurssi yksityiskohtaisten esimerkkien avulla. Teorian ja menetelmien kertauksen jälkeen on kertaustehtäviä, jotka ovat samojen otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä. Kertausluku päättyy tehtäväsarjoihin, jotka sisältävät pääosin vaativampia tehtäviä koko kurssin alueelta.

Kulma

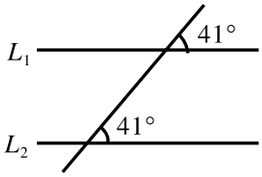
Kun suora leikkaa kahta muuta suoraa, muodostuu samankohtaisia kulmia.

Kolmas suora leikkaa suoria L_1 ja L_2. Kuvioon merkityt kulmat ovat keskenään samankohtaisia kulmia.

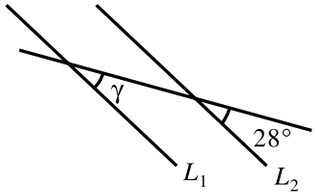


Kaksi suoraa ovat keskenään yhdensuuntaiset, jos ja vain jos samankohtaiset kulmat, jotka muodostuvat, kun kolmas suora leikkaa niitä, ovat yhtä suuret.

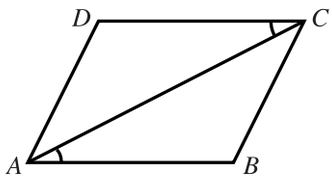
Suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset, koska samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.



Jos suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset, niin $\gamma = 28°$.

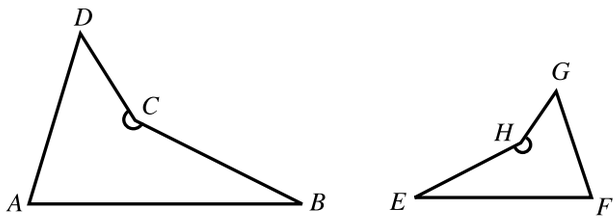


Nelikulmio $ABCD$ on suunnikas. Koska sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaisia, niin kulmat CAB ja ACD ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuria.



Yhdenmuotoisuus

Kuviot ja kappaleet, jotka saadaan toisistaan kiertämällä, suurentamalla, pienentämällä tai peilaamalla, ovat yhdenmuotoiset.



Nelikulmio $EFGH$ on nelikulmion $ABCD$ pienennetty peilikuva, joten nelikulmiot ovat yhdenmuotoiset.

Yhdenmuotoisissa kuvioissa ja kappaleissa:

kulma ja vastinkulma ovat yhtä suuret

Esimerkiksi $\sphericalangle BCD = \sphericalangle GHE$.

ja

kaikki suhteet

$$\frac{\text{vastinjanan pituus}}{\text{janan pituus}}$$

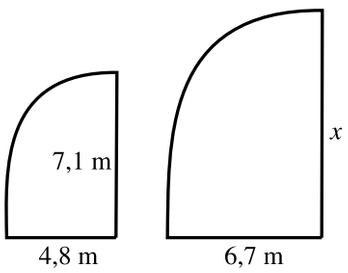
ovat yhtä suuret. Suhde on yhdenmuotoisuussuhde eli mittakaava.

Esimerkiksi lävistäjien AC ja FH pituuksien suhde on yhtä suuri kuin sivujen AB ja EF pituuksien suhde:

$$\frac{AC}{FH} = \frac{AB}{EF}$$

Yhdenmuotoisuussuhde voidaan määrittää, jos tunnetaan yhden janan ja sen vastinjanan pituudet.

Purjeet ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisuussuhde on $\frac{6{,}7}{4{,}8}$.



Janojen pituuksia voidaan määrittää verrantoyhtälöllä.

$\frac{x}{7{,}1} = \frac{6{,}7}{4{,}8}$ Kerrotaan ristiin.

$4{,}8x = 6{,}7 \cdot 7{,}1 \quad | : 4{,}8$

$x = \frac{6{,}7 \cdot 7{,}1}{4{,}8} \approx 9{,}9 \text{ (m)}$

Verrantoja voi muodostaa myös toisella tavalla: Saman kuvion kahden janan suhde on yhtä suuri kuin yhdenmuotoisessa kuviossa olevien vastinjanojen suhde.

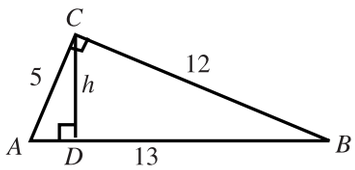
Korkeuden suhde leveyteen on molemmissa purjeissa yhtä suuri:

$$\frac{x}{6{,}7} = \frac{7{,}1}{4{,}8}$$

Kun verranto kerrotaan ristiin, saadaan sama yhtälö kuin edellä.

Kolmioiden yhdenmuotoisuus voidaan usein perustella yhdenmuotoisuuslauseella kk:
Jos kolmion kahta kulmaa vastaavat yhtä suuret kulmat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Kolmio ABC on suorakulmainen ja CD on hypotenuusalle piirretty korkeusjana.



Kolmioissa ABC ja ACD on kaksi yhtä suurta kulmaa:

Molemmissa kolmioissa on suora kulma.

$\sphericalangle A$ on kolmioiden yhteinen kulma.

Siis kolmiot ABC ja ACD ovat yhdenmuotoiset (kk).

Ratkaistaan korkeusjanan h pituus.

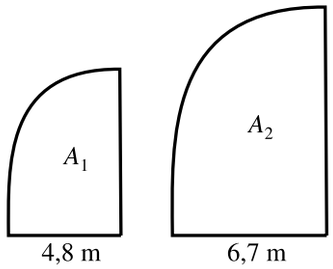
$$\frac{h}{5} = \frac{12}{13}$$

$$13h = 5 \cdot 12$$

$$h = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}$$

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen (mittakaavan) neliö.

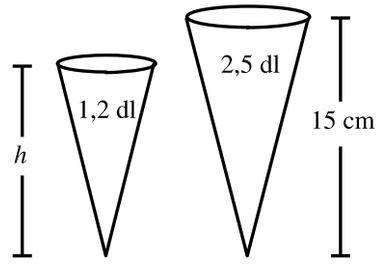
Pienemmän purjeen pinta-alan suhde suuremman purjeen pinta-alaan on



$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{4{,}8}{6{,}7}\right)^2 \approx 0{,}51 = 51\ \%.$$

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on yhdenmuotoisuussuhteen kuutio.

Jäätelötuutit ovat yhdenmuotoiset. Ratkaistaan 1,2 desilitran tuutin korkeus h.



Tilavuuksien suhde $\frac{1,2}{2,5}$ on korkeuksien suhteen kuutio.

$$\left(\frac{h}{15}\right)^3 = \frac{1,2}{2,5}$$

$$\frac{h}{15} = \sqrt[3]{\frac{1,2}{2,5}} \qquad | \cdot 15$$

$$h = 15 \cdot \sqrt[3]{\frac{1,2}{2,5}} \approx 12 \text{ (cm)}$$

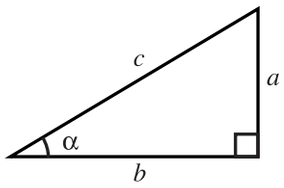
Suorakulmainen kolmio

Terävän kulman kosini, sini ja tangentti ovat suorakulmaisen kolmion sivujen suhteita. Jos suorakulmaisessa kolmiossa on terävä kulma α, niin:

$$\cos\alpha = \frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}}$$



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

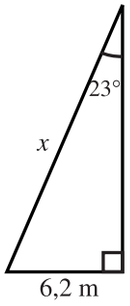
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Kosinin, sinin ja tangentin avulla voidaan ratkaista suorakulmaisen kolmion sivuja

$$\sin 23° = \frac{6{,}2}{x} \qquad | \cdot x$$

$$x \sin 23° = 6{,}2 \qquad | : \sin 23°$$

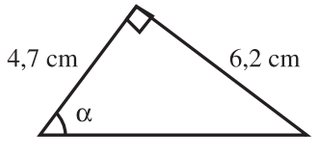
$$x = \frac{6{,}2}{\sin 23°} \approx 16 \text{ (m)}$$



ja kulmia.

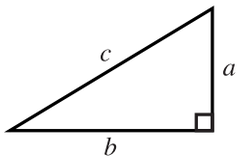
$$\tan\alpha = \frac{6{,}2}{4{,}7}$$

$$\alpha \approx 53°$$



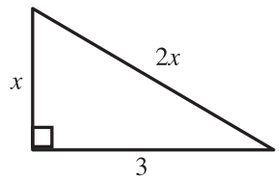
Suorakulmaisen kolmion sivuille pätee Pythagoraan lause: Kateettien pituuksien neliöiden summa on hypotenuusan pituuden neliö.

$a^2 + b^2 = c^2$



Pythagoraan lause pätee myös kääntäen: Jos kolmion sivut a, b ja c toteuttavat yhtälön $c^2 = a^2 + b^2$, niin sivujen a ja b välinen kulma on suorakulma.

Suorakulmaisen kolmion yhden kateetin pituus on 3, ja kolmion hypotenuusa on kaksi kertaa niin pitkä kuin toinen kateetti. Ratkaistaan tuntemattomat sivut.



$(2x)^2 = x^2 + 3^2$

$4x^2 = x^2 + 9$

$3x^2 = 9$

$x^2 = 3$

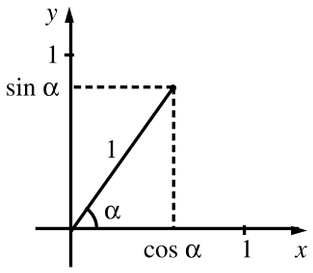
$x = \sqrt{3}$

Toisen kateetin pituus on $\sqrt{3}$ ja hypotenuusan pituus $2\sqrt{3}$.

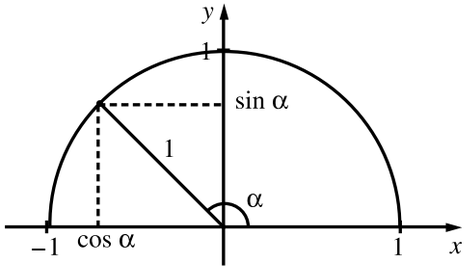
Kolmion sivujen pituudet ovat 7, 8 ja $\sqrt{15}$. Sivujen pituuksien neliöt ovat $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ ja $(\sqrt{15})^2 = 15$. Koska $7^2 + (\sqrt{15})^2 = 8^2$, niin kolmio on suorakulmainen. Kolmion suora kulma on niiden sivujen välissä, joiden pituudet ovat 7 ja $\sqrt{15}$.

Tylpän kulman kosini ja sini

Origosta lähtevän janan pituus on 1. Jos janan ja positiivisen x-akselin välinen kulma α on terävä, niin janan toisen päätepisteen x-koordinaatti on $\cos\alpha$ ja y-koordinaatti on $\sin\alpha$.



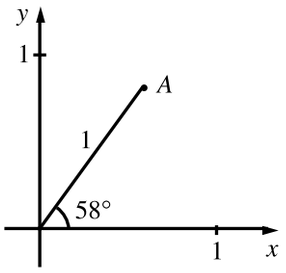
Yleistämällä tämä kosinin ja sinin tulkinta saadaan määritelmä kulman α kosinille ja sinille, kun $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

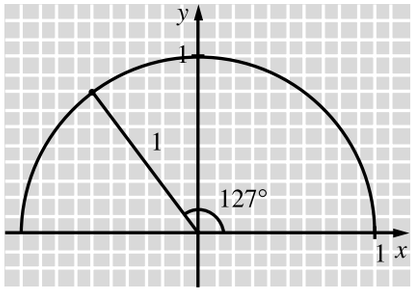


Kulman α kosini on janan toisen päätepisteen x-koordinaatti.

Kulman α sini on toisen päätepisteen y-koordinaatti.

Pisteen A x-koordinaatti on $\cos 58° \approx 0{,}530$ ja y-koordinaatti $\sin 58° \approx 0{,}848$.

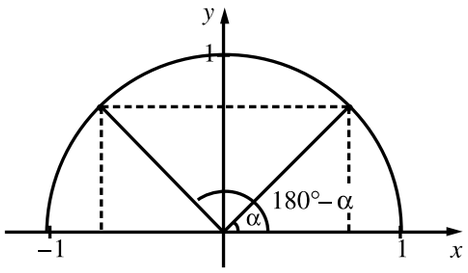




Kuvion mukaan:
$\cos 127° \approx -0{,}6$

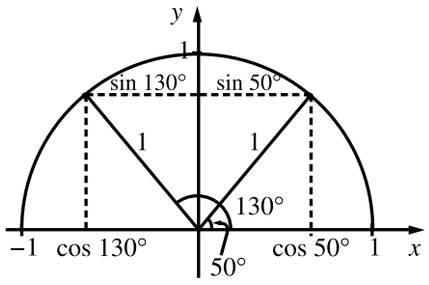
$\sin 127° \approx 0{,}8$

Peilaamalla jana y-akselin suhteen nähdään, että kulman ja sen suplementtikulman kosinit ovat toistensa vastalukuja ja sinit ovat yhtä suuret.



$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$



$\cos 130° = -\cos 50°$

$\sin 130° = \sin 50°$

Yhtälön

$\cos\alpha = a$,

missä $-1 \leqslant a \leqslant 1$, toteuttaa yksi kulma välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Kulman α likiarvo saadaan laskimen näppäimellä $\cos^{-1}$.

$\cos\alpha = -0{,}19$

$\alpha \approx 101{,}0°$

Yhtälön

$\sin\alpha = a$,

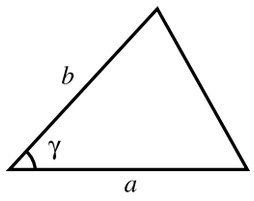
missä $0 \leqslant a \leqslant 1$, toteuttaa kaksi kulmaa välillä $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ (paitsi, kun $a = 1$, jolloin $\alpha = 90°$). Terävän kulman α likiarvo saadaan laskimella. Toinen ratkaisu on laskimella saadun kulman suplementtikulma.

$\sin\alpha = 0{,}24$

$\alpha \approx 13{,}9°$ tai $\alpha \approx 180° - 13{,}9° = 166{,}1°$

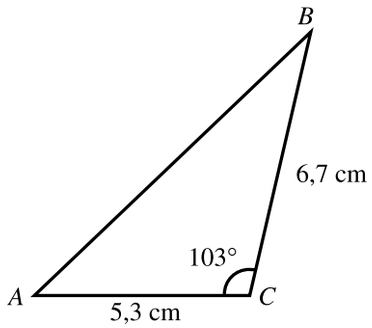
Kolmion pinta-alan trigonometrinen kaava

Jos a ja b ovat kolmion kaksi sivua ja γ on näiden sivujen välinen kulma, niin kolmion pinta-ala on



$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma .$$

Kolmion ABC pinta-ala on



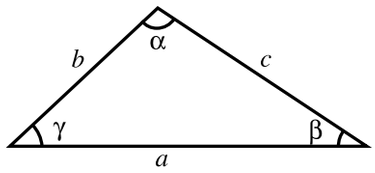
$$A = \frac{1}{2} \cdot 5{,}3 \cdot 6{,}7 \cdot \sin 103° \approx 17 \ \ (\text{cm}^2).$$

Sinilause

Jos kolmiosta valitaan mitkä tahansa kaksi sivua, niin niille ovat suhteet

$$\frac{\text{sivun pituus}}{\text{vastaisen kulman sini}}$$

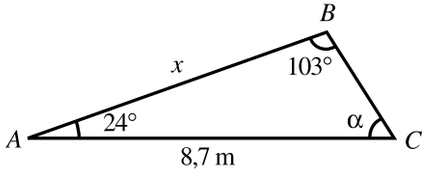
yhtä suuret.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Sinilauseen avulla voidaan ratkaista kolmion tuntemattomia osia seuraavissa tilanteissa:

Kolmiosta tunnetaan kaksi kulmaa ja yksi sivu.



Ratkaistaan sivun AB pituus. Vastaisen kulman α suuruus on $180° - (24° + 103°) = 53°$.

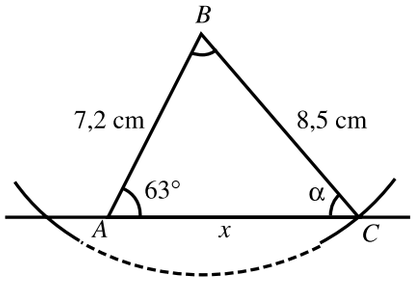
Sinilauseen mukaan:

$$\frac{x}{\sin 53°} = \frac{8{,}7}{\sin 103°} \qquad \big| \cdot \sin 53°$$

$$x = \frac{8{,}7 \cdot \sin 53°}{\sin 103°} \approx 7{,}1 \text{ (m)}$$

Kolmiosta tunnetaan kaksi sivua ja niistä toisen vastainen kulma. Ratkaisukolmioita saattaa tällöin olla kaksi.

Kolmiosta ABC tiedetään, että $\sphericalangle A = 63°$, $AB = 7{,}2$ cm ja $BC = 8{,}5$ cm. Piirretään mallikuvio oikeissa mittasuhteissa. Sivu BC piirretään harpilla.



Koska kulman A vastainen sivu BC on pitempi kuin sivu AB, kolmioita, joissa on vaaditut osat, on vain yksi.

Kulma C ratkaistaan sinilauseella:

$$\frac{7{,}2}{\sin\alpha} = \frac{8{,}5}{\sin 63°} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$8{,}5 \sin\alpha = 7{,}2 \sin 63° \qquad \big| : 8{,}5$$

$$\sin\alpha = \frac{7{,}2 \sin 63°}{8{,}5} \approx 0{,}7547$$

Yhtälön kahdesta ratkaisusta tulee nyt kyseeseen vain terävä kulma.

$$\alpha \approx 49{,}00°$$

Kulma B:

$$\sphericalangle B \approx 180° - (63° - 49{,}00°) = 68{,}00°$$

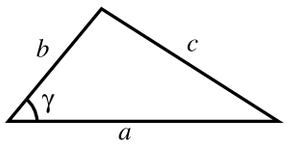
Sivu AC:

$$\frac{x}{\sin 68{,}00°} = \frac{8{,}5}{\sin 63°} \qquad \big| \cdot \sin 68{,}00°$$

$$x = \frac{8{,}5 \sin 68{,}00°}{\sin 63°} \approx 8{,}8 \text{ (cm)}$$

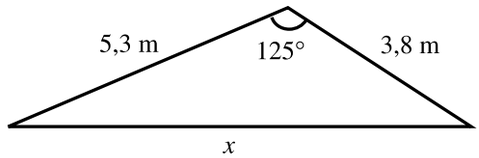
Kosinilause

Olkoot a ja b kolmion kaksi sivua ja γ niiden välinen kulma. Jos c on kulman γ vastainen sivu, niin



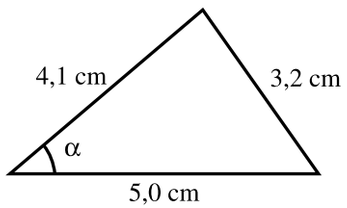
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Kosinilauseen avulla voidaan ratkaista kolmion kolmas sivu, kun tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma,



$$x^2 = 5{,}3^2 + 3{,}8^2 - 2 \cdot 5{,}3 \cdot 3{,}8 \cdot \cos 125°$$
$$x \approx 8{,}1 \text{ (m)}$$

ja kolmion kulmat, kun tunnetaan kolmion kaikki sivut.



$$3{,}2^2 = 4{,}1^2 + 5^2 - 2 \cdot 4{,}1 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot 4{,}1 \cdot 5 \cdot \cos \alpha = 4{,}1^2 + 5^2 - 3{,}2^2$$

$$\cos \alpha = \frac{4{,}1^2 + 5^2 - 3{,}2^2}{2 \cdot 4{,}1 \cdot 5} = 0{,}77$$

$$\alpha \approx 40°$$

Ympyrä

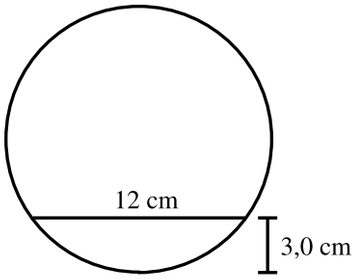
Välineitä ympyrän osien tutkimiseen ovat muun muassa Pythagoraan lause ja trigonometria.

Luku π on ympyrän kehän pituuden suhde halkaisijan pituuteen, joten ympyrän kehän pituus on
$p = \pi d$, missä d on halkaisija,
eli
$p = 2\pi r$, missä r on säde.

Ympyrän pinta-ala lasketaan kaavalla

$A = \pi r^2$, missä r on säde.

Ympyrän 12 cm:n pituinen jänne erottaa ympyrästä segmentin, jonka korkeus on 3,0 cm. Ratkaistaan ympyrän säde.



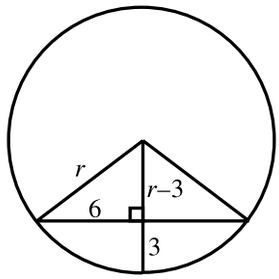
Pythagoraan lauseella saadaan yhtälö.

$r^2 = (r - 3)^2 + 6^2$

$r^2 = r^2 - 6r + 9 + 36$

$6r = 45$

$r = 7{,}5$ (cm)



Ympyrän muotoisen luistinradan pituudeksi halutaan 100 m. Luistinrata voidaan merkitä käyttämällä säteenä köyttä, jonka pituus on

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} \approx 15{,}9 \text{ (m)}.$$

Luistinradan sisään jää alue, jonka pinta-ala on

$$A = \pi \left(\frac{100}{2\pi}\right)^2 \approx 796 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Kaaren pituuden b suhde koko ympyrän kehän pituuteen p on yhtä suuri kuin kaaren keskuskulman α suhde täysikulmaan $360°$.

$$\frac{b}{p} = \frac{\alpha}{360°}$$

Jos kaaren keskuskulma on α ja ympyrän säde on r, niin kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r.$$

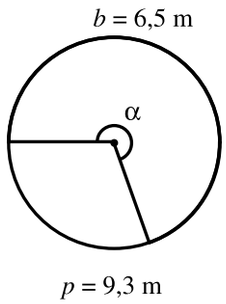
Sektorin pinta-alan A_S suhde koko ympyrän alaan A_Y on yhtä suuri kuin sektorin keskuskulman α suhde täysikulmaan $360°$.

$$\frac{A_S}{A_Y} = \frac{\alpha}{360°}$$

Jos kaaren keskuskulma on α ja ympyrän säde on r, niin sektorin pinta-ala on

$$A_s = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2.$$

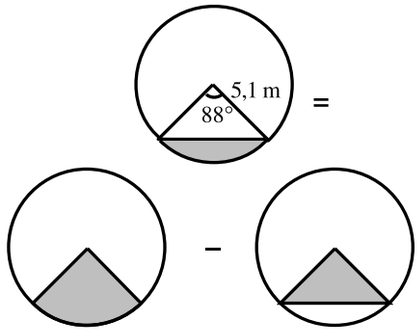
Ympyrään, jonka kehän pituus on 9,3 m, on piirretty 6,5 m:n pituinen kaari. Ratkaistaan kaaren keskuskulman suuruus.



$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{6{,}5}{9{,}3} \quad \big| \cdot 360°$$

$$\alpha = \frac{6{,}5 \cdot 360°}{9{,}3} \approx 250°$$

Segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin pinta-alasta tasakylkisen kolmion pinta-ala.



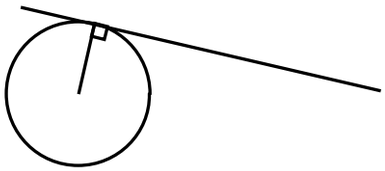
$$A = A_S - A_K$$

$$= \frac{88°}{360°} \cdot \pi \cdot 5{,}1^2 - \frac{1}{2} \cdot 5{,}1 \cdot 5{,}1 \cdot \sin 88°$$

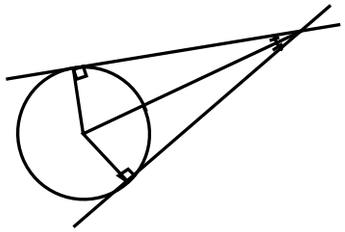
$$\approx 7{,}0 \ \ (\mathrm{m}^2)$$

Ympyrän tangentti

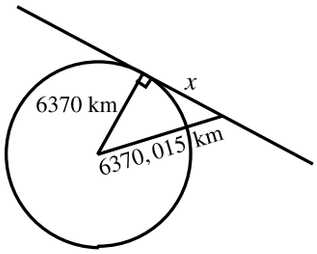
Ympyrän tangentti on suora, joka kohtaa ympyrän vain yhdessä pisteessä. Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.



Ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voidaan ympyrälle piirtää kaksi tangenttia. Keskipisteen kautta kulkeva suora puolittaa tangenttien välisen kulman.



Ratkaistaan, kuinka kauas merelle näkyy rantakalliolta 15 metrin korkeudelta.

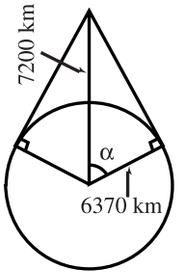


$$x^2 + 6370^2 = 6370{,}015^2$$

$$x^2 = 6370{,}015^2 - 6370^2$$

$$x \approx 14 \text{ (km)}$$

Viestintäsatelliitti on pohjoisnavan yläpuolella 7 200 kilometrin korkeudella. Ratkaistaan, mille pohjoisille leveysasteille satelliitin näkökenttä ulottuu.



Ratkaistaan ensin kuvion kulma α.

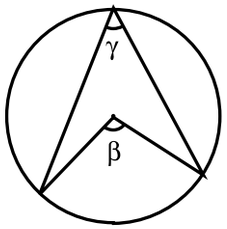
$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370 + 7200}$$

$$\alpha \approx 62°$$

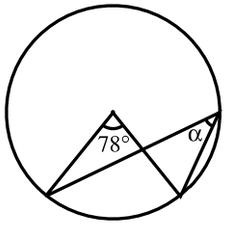
Rajana on leveysaste $90° - 62° = 28°$ pohjoista leveyttä. Näkyvyysalue ulottuu niille pohjoisille leveysasteille, joiden asteluku on suurempi kuin 28°.

Kehäkulma

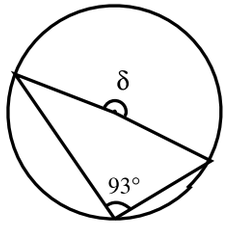
Kehäkulmalauseen mukaan kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.



$\gamma = \frac{\beta}{2}$

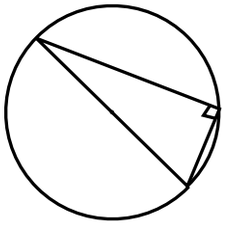


$\alpha = \frac{78°}{2} = 39°$



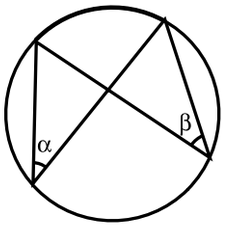
$\delta = 2 \cdot 93° = 186°$

Ertyisesti siis puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora kulma.

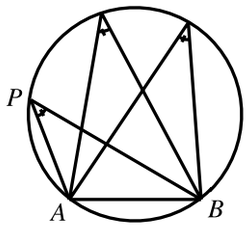


Kehäkulmalauseesta seuraa, että samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.

$\alpha = \beta$



Pisteet, joista jana AB näkyy samassa kulmassa kuin pisteestä P, ovat pisteiden A, B ja P kautta kulkevan ympyrän kaaren P:n puoleisella osalla.



Pallo

Pallon tilavuus lasketaan kaavalla

$$V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

missä r on pallon säde.

Pallon pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = 4\pi r^2.$$

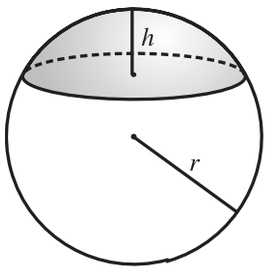
Pallosegmentin tilavuus on

$$V = \pi h^2 (r - \frac{h}{3})$$

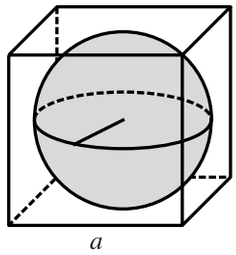
ja pallon kalotin pinta-ala

$$A = 2\pi rh,$$

missä r on pallon säde ja h segmentin (kalotin) korkeus.



Kuution särmä on a. Kuution sisään on piirretty pallo. Lasketaan pallon tilavuus.



$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a^3}{8}$$

$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot a^3}{3 \cdot 8} = \frac{\pi a^3}{6}$$

Pallon tilavuuden suhde kuution tilavuuteen on

$$\frac{\pi a^3}{6} : a^3 = \frac{\pi a^3}{6} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52 = 52\ \%.$$

Lasketaan kuution sisään piirretyn pallon pinta-ala.

$$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4 \cdot \pi \cdot \frac{a^2}{4} = \pi a^2$$

Pallon pinta-alan suhde kuution pinta-alaan on

$$\frac{\pi a^2}{6a^2} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52 = 52\ \%.$$

Pallo, jonka säde on 15,0 cm, teki maahan pudotessaan kuopan, jonka syvyys on 6,4 cm. Kuopan tilavuus on

$$V = \pi \cdot 6{,}4^2 \cdot (15{,}0 - \frac{6{,}4}{3}) \approx 1\ 700\ (\text{cm}^2)$$

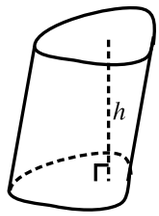
ja pohjan pinta-ala

$$A = 2\pi \cdot 15{,}0 \cdot 6{,}4 \approx 600\ \ (\text{cm}^2).$$

Lieriö

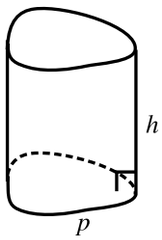
Lieriön tilavuus on pohjan pinta-alan ja lieriön korkeuden tulo.

$V = Ah$



Suoran lieriön vaipan pinta-ala on pohjan piirin ja korkeuden tulo.

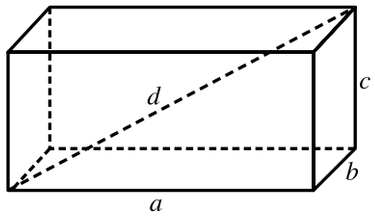
$A = ph$



Särmiö on lieriö, jonka pohja on monikulmio.

Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituuden kaava yleistää Pythagoraan lauseen avaruuteen: Avaruuslävistäjän pituuden neliö on särmien pituuksien neliöiden summa.

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$



Kun $15\ \text{m}^3$ multaa levitetään tasaiseksi kerrokseksi $250\ \text{m}^2$:n suuruiselle nurmikkoalueelle, niin multakerroksen paksuudeksi tulee

$$h = \frac{V}{A} = \frac{15\ \text{m}^3}{250\ \text{m}^2} = 0{,}060\ \text{m}$$

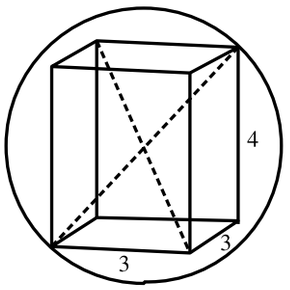
eli 6,0 cm.

Jos huoneen ympärysmitta on 15,6 m ja korkeus 2,60 m, niin huoneen seinäpinta-ala on

$A = 15{,}6\ \text{m} \cdot 2{,}60\ \text{m} \approx 40{,}6\ \text{m}^2$.

Suorakulmaisen särmiön pohja on neliö, jonka sivujen pituudet ovat 3. Särmiön korkeus on 4. Määritetään särmiön ympäri asetetun (eli jokaisen kärkipisteen kautta kulkevan) pallon säde.

Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjä on pallon halkaisija.



$d^2 = 3^2 + 3^2 + 4^2$

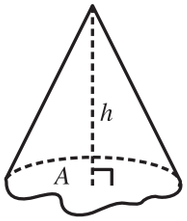
$d^2 = 34$

$d = \sqrt{34}$

Pallon säde $r = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$ ($\approx 2{,}92$).

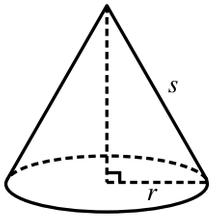
Kartio

Kartion tilavuus on kolmasosa pohjan pinta-alan ja kartion korkeuden tulosta.



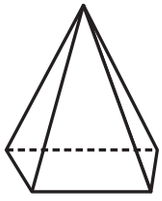
$$V = \frac{A \cdot h}{3}$$

Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala lasketaan kaavalla



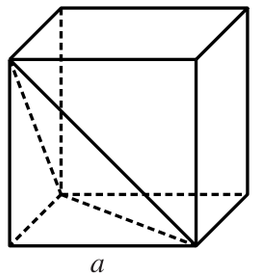
$$A = \pi rs.$$

Pyramidi on kartio, jonka pohja on monikulmio. Pyramidin vaippa muodostuu kolmioista.



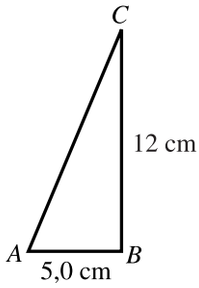
Pyramidi on säännöllinen, jos sen pohja on säännöllinen monikulmio ja jos huipusta piirretty korkeusjana kohtaa pohjan sen keskipisteessä.

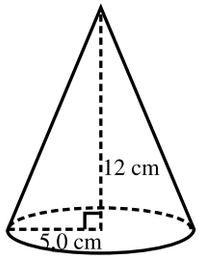
Kun kuutio leikataan tasolla, joka kulkee kuution yhden kärjen ja vastakkaisen tahkon lävistäjän kautta, muodostuu kartio, jonka pohja on puolet kuution tahkosta ja korkeus kuution särmän pituus. Jos kuution särmän pituus on a, niin kartion tilavuus on



$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

Kun suorakulmainen kolmio ABC pyörähtää sivun BC ympäri, rajautuu suoran ympyräkartion muotoinen kappale.





Kartion sivujana on kolmion hypotenuusa

$\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (cm).

Kartion vaipan pinta-ala on

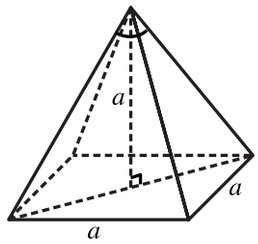
$A = \pi \cdot 5 \cdot 13 \approx 200$ (cm^2).

Kulma avaruudessa

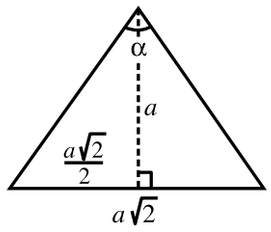
Kahden janan välinen kulma lasketaan sopivasta kolmiosta.

Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on yhtä suuri kuin pohjaneliön sivu. Lasketaan pyramidin vastakkaisten sivusärmien välisen kulman suuruus.

Merkitään pohjasärmiä ja korkeutta a. Leikataan pyramidi tasolla, joka sisältää vastakkaiset sivusärmät.



Leikkauskuvio on tasakylkinen kolmio. Vastakkaisten sivusärmien välinen kulma on kolmion huippukulma α. Kolmion kanta on pohjan lävistäjä $a\sqrt{2}$.



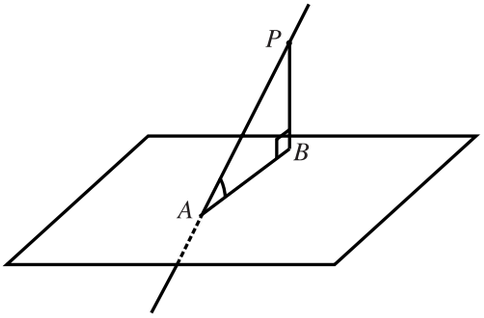
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : a = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

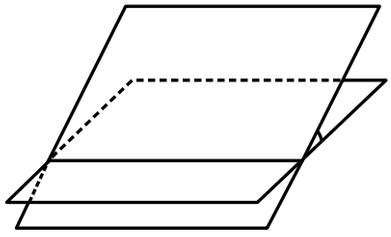
$$\frac{\alpha}{2} \approx 35{,}26°$$

$$\alpha \approx 70{,}5°$$

Suoran ja tason välinen kulma voidaan usein määrittää suorakulmaisesta kolmiosta APB, missä A on suoran ja tason leikkauspiste, P jokin suoralla oleva piste ja B pisteen P kohtisuora projektio tasolla.

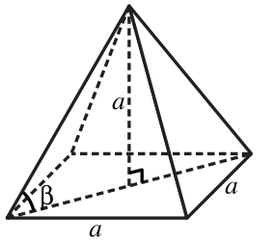


Kahden tason välinen kulma piirtyy tasoon, joka on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan.



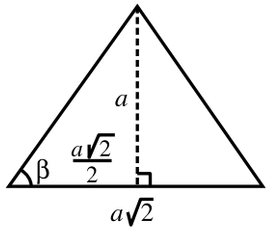
Määritetään edellisen pyramidin sivusärmän ja pohjan välinen kulma.

Kulma on edellisen esimerkin tasakylkisen kolmion kantakulma β.



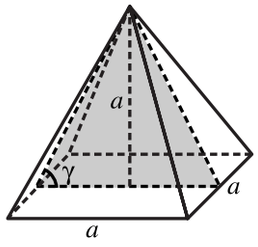
$$\tan\beta = a : \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$= a \cdot \frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

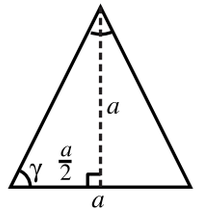


$$\beta \approx 54{,}7°$$

Määritetään edellisen pyramidin sivutahkon ja pohjatahkon välinen kulma.



Kulma piirtyy tasoon, joka sisältää sivutahkojen huipusta piirretyt korkeusjanat.



$$\tan\gamma = a : \frac{a}{2} = a \cdot \frac{2}{a} = 2$$

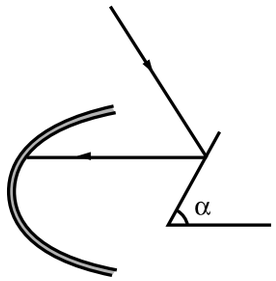
$$\gamma \approx 63{,}4°$$

KERTAUSTEHTÄVIÄ

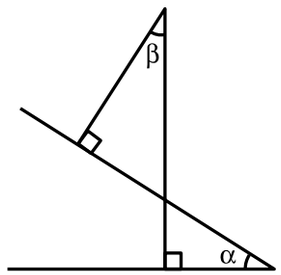
Tehtävät ovat kertausluvun otsikoiden mukaan järjestettyjä perustehtäviä.

KULMA

385. Aurinkovoimalan peilit suunnataan kohti aurinkoa. Peilien kaltevuus säätyy niin, että säteet heijastuvat vaakasuorina säteitä keräävään kaarevaan peiliin. Kuinka suuri peilien kaltevuuskulma α on silloin, kun aurinko paistaa 54°:n korkeudella?



386. Osoita, että kulmat α ja β ovat yhtä suuret.



387. Osoita, että suorakulmaisen kolmion terävien kulmien puolittajat leikkaavat toisensa kulmassa, jonka suuruus ei riipu terävien kulmien suuruudesta.

YHDENMUOTOISUUS

388. Kartan mittakaava 1 : 3 500 000. Kartalla saaren pituus on 3,1 cm ja pinta-ala 7,2 cm^2. Kuinka pitkä saari on, ja mikä saaren pinta-ala on?

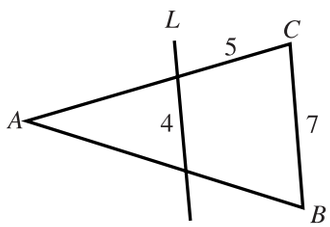
389. Lasersäde tähdätään 132 cm:n korkeudelta suoraan kohti 4,10 metrin päässä olevaa peiliseinää. Mille korkeudelle säde tulee tähdätä, jotta seinästä heijastunut valo kohtaisi lattian 2,85 metrin päässä seinästä?

390. Kun suorakulmion muotoinen paperiarkki leikattiin lyhyemmän sivun suuntaisesti kolmeen yhtä suureen osaan, niin osat olivat yhdenmuotoiset koko arkin kanssa. Arkin lyhyemmän sivun pituus oli 12,4 cm. Kuinka pitkä pitempi sivu oli?

391. Suora L on yhdensuuntaisen sivun BC kanssa. Laske

a) sivun AC pituus

b) suoran L erottaman kolmion pinta-alan suhde kolmion ABC pinta-alaan.



392. Ämpäri, jonka korkeus on 30 cm ja vetoisuus 12 litraa, on täynnä vettä. Ämpäristä täytetään yhdenmuotoinen pienempi ämpäri, jonka korkeus on 25 cm. Kuinka paljon vettä isompaan ämpäriin jää?

393. Pahvisen laatikon tilavuus on $80\ \text{dm}^3$ ja korkeus 52 cm. Laatikon tekemiseen tarvitaan $1{,}3\ \text{m}^2$ pahvia. Kuinka korkea on yhdenmuotoinen laatikko, jonka tilavuus on $150\ \text{dm}^3$? Kuinka paljon siihen tarvitaan pahvia?

394. Kolmion muotoisen metsäpalstan pinta-ala on 117 ha. Palstan yhden sivun etäisyys vastakkaisesta kärjestä on 1 350 m. Palstasta halutaan erottaa tämän sivun suuntaisella linjalla puolisuunnikkaan muotoinen osa, jonka pinta-ala on 69 ha. Määritä linjan etäisyys sivusta.

SUORAKULMAINEN KOLMIO

395. Uimaranta syvenee tasaisesti 6,2°:n kulmassa. Syvän veden varoituspoiju on 18 metrin päässä rannasta. Kuinka syvää poijun kohdalla on?

396. Laskettelurinteen kaltevuuskulma on 35°, ja lähdön ja maalin korkeusero on 270 m. Kuinka pitkä suora lasku nopeuslaskijalla on rinteessä?

397. Tasakylkisen suorakulmaisen kolmion hypotenuusa jaetaan kolmeen yhtä pitkään osaan ja jakopisteet yhdistetään suoran kulman kärkeen. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella, kuinka suuriin osiin suora kulma jakautuu.

398. Aurinko paistaa 42°:n korkeudella. Lipputangon varjosta lankeaa 6,0 metrin pituinen osa maahan ja 3,6 metrin pituinen loppuosa pystysuoralle seinälle. Kuinka pitkä lipputanko on?

399. Aamupäivällä oli vaellettu kolme tuntia länteen ja iltapäivällä samalla vauhdilla neljä tuntia etelään. Leiriydyttäessä mitattiin kartalta, että oli päädytty 16 kilometrin etäisyydelle edellisestä leiripaikasta. Kuinka pitkä matka päivän aikana oli vaellettu?

400. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 20 ja 21. Kuinka pitkä suoran kulman kärjestä hypotenuusalle piirretty korkeusjana on?

TYLPÄN KULMAN SINI JA KOSINI

401. Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella kaikki välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmat, joille
a) $\cos \alpha = -0{,}52$
b) $\sin \alpha = 0{,}61$
c) $\cos \alpha = 0{,}37$.

402. Määritä asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) tylppä kulma, jonka sini on 0,41
b) terävä kulma, jonka sini on 0,79
c) kaikki välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulmat, joiden kosini on 0,72.

KOLMION PINTA-ALAN TRIGONOMETRINEN KAAVA

403. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 18,4 cm ja 26,5 cm.
a) Kuinka suuri kolmion pinta-ala on, jos sivujen välinen kulma on 107,2°?
b) Kuinka suuri sivujen välisen kulman tulisi olla, jotta kolmion pinta-ala olisi $90{,}0\ \text{cm}^2$?

404. Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 6,2 cm ja 18,1 cm. Suunnikkaan tylppien kulmien suuruus on 148°. Kuinka suuri suunnikkaan pinta-ala on?

405. Suunnikkaan lävistäjien välinen terävä kulma on 51°. Lävistäjien pituudet ovat 7,2 cm ja 4,8 cm. Kuinka suuri suunnikkaan pinta-ala on?

406. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 12, ja kolmion pinta-ala on 18. Määritä kolmion huippukulman sinin tarkka arvo ja huippukulman suuruuden likiarvo asteen sadasosan tarkkuudella.

SINILAUSE

407. Kolmion ABC kulman A suuruus on 72°, kulman B suuruus 29° ja sivun AB pituus 8,2 m. Kuinka pitkä sivu BC on?

408. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 6,4 cm ja 4,8 cm. Jälkimmäisen sivun vastaisen kulman suuruus on 36°. Laske kolmion muiden kulmien ja sivujen suuruudet.

409. Rinne viettää tasaisesti 12°:n kulmassa. Myrsky taittoi rinteeseen pystytetyn sähköpylvään, ja yläosa kaatui suoraan alarinteeseen irtoamatta tyviosasta. Pylvään huippu osui maahan 8,0 metrin päässä pylvään juuresta ja se muodosti 28°:n kulman rinteen kanssa. Laske pylvään korkeus.

410. Rinne viettää tasaisesti 12°:n kulmassa. Myrsky taittoi rinteeseen pystytetyn 15,0 metriä pitkän sähköpylvään 6,0 metrin korkeudelta, ja yläosa kaatui suoraan ylärinteeseen irtoamatta tyviosasta. Kuinka kaukana pylvään juuresta pylvään huippu osui maahan?

411. 8,4 metriä leveä talo on katettu epäsymmetrisellä harjakatolla, jonka lappeiden kaltevuuskulmat ovat 34° ja 19°. Laske kattorakennelman korkeus.

KOSINILAUSE

412. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 5,2 cm ja 12,1 cm. Näiden sivujen välisen kulman suuruus on 118°. Kuinka pitkä kolmion kolmas sivu on?

413. Rinne viettää tasaisesti 12°:n kulmassa. Myrsky taittoi rinteessä kasvavan hongan 6,0 metrin korkeudelta. Yläosa kaatui suoraan alarinteeseen irtoamatta tyviosasta, ja latva osui maahan 9,0 metrin päässä puun tyvestä. Laske puun korkeus.

414. Kolmion sivujen pituudet ovat 4,5 cm, 6,8 cm ja 9,1 cm. Kuinka suuri kolmion suurin kulma on?

415. Tasakylkisen kolmion kylki on 5 ja kanta 3. Määritä kolmion huippukulman kosinin tarkka arvo ja huippukulman suuruuden likiarvo asteen sadasosan tarkkuudella.

YMPYRÄ

416. Kahdesta samankeskisestä ympyrästä suuremman säde on 17. Suuremman ympyrän jänteestä, jonka pituus on 30, jää pienemmän ympyrän sisään osa, jonka pituus on 12. Mikä pienemmän ympyrän säde on?

417. Puoliympyrään on piirretty tasakylkinen kolmio, jonka kantana on halkaisija ja jonka huippu on puoliympyrän kaarella. Määritä kolmion pinta-alan suhde puoliympyrän pinta-alaan.

418. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 12 ja kannalle piirretty korkeus 18. Kuinka pitkä kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on?

419. Suoran ympyrälieriön muotoisen tölkin ympärysmitta on 240 mm. Tölkin kylkeen liimataan suorakulmion muotoinen nimilappu, jonka korkeus on 60 mm. Kuinka leveä nimilapun tulee olla, jotta se etäältä suoraan edestä katsottuna näyttäisi neliön muotoiselta?

420. Kuinka suuren segmentin 8,6 cm pitkä jänne erottaa ympyrästä, jonka säde on 6,5 cm?

421. Ympyrän sisään on piirretty neliö ja jokaiseen neliön ulkopuolelle jäävään ympyrän segmenttiin on piirretty mahdollisimman suuri ympyrä.
a) Mikä on segmenttiin piirretyn ympyrän säde, jos koko ympyrän säde on r?
b) Mikä on segmentteihin piirrettyjen ympyröiden yhteenlasketun pinta-alan suhde koko ympyrän pinta-alaan? Anna vastaukseksi suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

YMPYRÄN TANGENTTI

422. Missä kulmassa maapallo näkyy avaruusaluksesta, joka on matkalla kuuhun 15 000 kilometrin etäisyydellä Maasta? Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

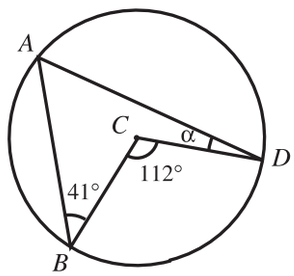
423. Kuinka korkealle Lontoon yläpuolelle tulee nousta, jotta näkisi Helsingin? Lontoon ja Helsingin etäisyys on 1 900 km. Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

424. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 16 ja kannalle piirretty korkeus 15. Kuinka pitkä kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on?

425. 12 ympyrää, joiden jokaisen säde on 5,0 cm, on sijoitettu niin, että niiden keskipisteet ovat saman ympyrän kehällä ja jokainen ympyrä sivuaa kahta viereistä ympyrää. Kuinka suuri ympyrä mahtuu näiden ympyröiden väliin jäävään alueeseen?

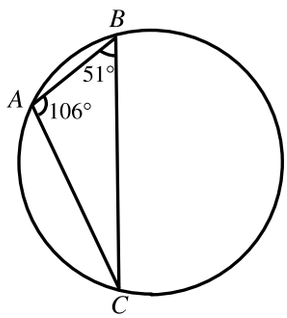
KEHÄKULMA

426. Nelikulmion $ABCD$ kärjet A, B ja D ovat ympyrän kehällä ja piste C on ympyrän keskipiste. Kuinka suuri kulma α on?



427. Nelikulmion $ABCD$ kärjet ovat ympyrän kehällä. Osoita, että lävistäjän BD ja sivujen BC ja DC välisten koverien kulmien BDC ja CBD summa on yhtä suuri kuin nelikulmion kulma A.

428. Ympyrän säde on 8,0 cm. Laske kolmion ABC sivun AB pituus.



429. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 8 ja 15. Kuinka suuri kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on? Missä pisteessä ympyrän keskipiste on?

PALLO

430. Eskimoiden iglu on muodoltaan puolipallo. Iglun ulkopuolelta mitattu leveys on 6,5 m ja seinän paksuus 30 cm. Mikä iglun tilavuus on?

431. Lasipallo painaa 1,96 kg. Kuinka suuri pallon pinnan ala on? Lasin tiheys on $2\,380\ \text{kg/m}^3$.

432. Sydney ja Buenos Aires sijaitsevat samalla leveyspiirillä 35° eteläistä leveyttä. Sydney sijaitsee pituuspiirillä 151° itäistä pituutta ja Buenos Aires pituuspiirillä 58° läntistä pituutta. Kuinka pitkä matka on Sydneystä Buenos Airesiin, jos
a) kuljetaan itään pitkin 35. eteläistä leveyspiiriä
b) matka tehdään kulkemalla ensin suoraan Etelänavalle ja sieltä suoraan Buenos Airesiin?
Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km.

433. Kuution sisällä on mahdollisimman suuri pallo ja tämän pallon sisällä mahdollisimman suuri kuutio. Laske pienemmän kuution tilavuuden suhde isomman kuution tilavuuteen.

434. Malja on muodoltaan kappale, joka muodostuu, kun pallo leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla, joista toinen kulkee pallon keskipisteen kautta. Maljan pohjan halkaisija on 12,0 cm ja suuaukon halkaisija 25,0 cm. Kuinka suuri maljan tilavuus on?

435. Kupolikatto on muodoltaan puolipallo, jonka halkaisija on 18,0 m. Kupolin laelta rajataan kullanväriseksi maalattava alue niin, että kupolin huippuun kiinnitetään 6,4 metrin pituinen lanka ja langan toiseen päähän solmitaan kynä. Lanka pidetään koko ajan kireänä ja katolle piirretään ympyrä. Kuinka suuri kullanväriseksi maalattavan alueen pinta-ala on?

LIERIÖ

436. Suoran ympyrälieriön muotoiseen astiaan kaadettiin 2,0 litraa vettä. Tällöin vedenpinnan korkeus astiassa kohosi 13 cm. Laske lieriön pohjan halkaisija.

437. Kattilassa, jonka pohjan halkaisija on 8,0 cm ja korkeus 10,0 cm, on vettä. Kuinka korkealla vesi saa olla kattilassa, jotta sitä ei valu pois, kun kattilaan pohjalle painetaan tuttipullo, jonka pohjan halkaisija on 6,0 cm ja korkeus yli 10 cm?

438. Sahtikuurna on 90 cm pitkä, ja kuurnan pituutta vastaan kohtisuora poikkileikkaus on 72 cm leveä puoliympyrä. Paljonko kuurnassa on mäskiä silloin, kun altaan korkeudesta puolet on peitossa?

439. Pallon sisällä on mahdollisimman suuri sellainen ympyrälieriö, jonka
a) korkeus on kaksi kolmasosaa pallon halkaisijasta
b) korkeus ja pohjan halkaisija ovat yhtä suuret.
Laske lieriön tilavuuden suhde pallon tilavuuteen. Anna vastaukseksi suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

KARTIO

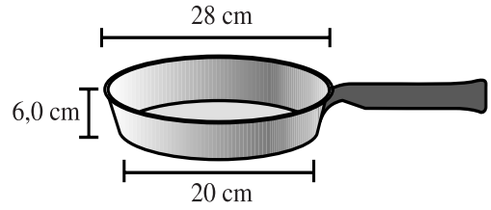
440. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on 4,0 cm ja pohjaneliön sivun pituus 6,0 cm. Laske pyramidin vaipan pinta-ala.

441. Katto, jonka korkeus on 6,4 metriä, on muodoltaan säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Lappeiden kaltevuuskulma on 25°. Kuinka suuri katon rajoittama tilavuus on?

442. Ympyrästä, jonka säde on 25 cm, leikataan 210°:n sektori, joka taivutetaan suoran ympyräkartion vaipaksi. Kuinka suuri ympyräkartion tilavuus on?

443. Suoran ympyräkartion muotoisen vesisäiliön pohjan halkaisija on 8,6 m. Vesisäiliön vaipan rakentamiseen käytettiin 280 m^2 teräslevyä. Laske säiliön tilavuus.

444. Laske paistinpannun tilavuus.



445. Pallon sisällä on suora ympyräkartio, jonka pohja ja huippu ovat pallon pinnalla ja jonka pohjan halkaisija on yhtä pitkä kuin pallon säde. Pallon keskipiste on kartion sisäpuolelle. Mikä on kartion tilavuuden suhde pallon tilavuuteen?

KULMA AVARUUDESSA

446. Paperista on leikattu tasakylkinen kolmio ABC, jonka kannan BC pituus on 21 cm ja kylkien pituus 18 cm. Paperi taitetaan pitkin kannalle piirrettyä korkeusjanaa, kunnes taitokset ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Kuinka suuri kulma BAC tällöin on?

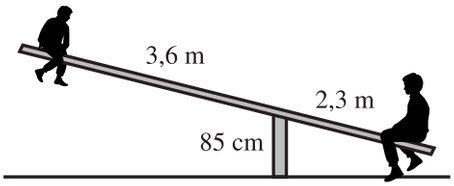
447. Suorakulmaisen särmiön pohjasärmän AB pituus on 6, pohjasärmän AD pituus on 4, ja särmiön korkeus AA' on 3. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella
a) avaruuslävistäjän AC' ja tahkon $CC'D'D$ välinen kulma
b) avaruuslävistäjän AC' ja särmän $C'D'$ välinen kulma
c) tahkojen lävistäjien AB' ja AD' välinen kulma.
Kärjen A yläpuolella olevaa kärkeä on merkitty A' jne.

448. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on kaksi kertaa niin suuri kuin pohjaneliön sivu. Kuinka suuri on
a) sivutahkon ja pohjan
b) kahden vastakkaisen sivutahkon
c) sivusärmän ja pohjan
d) sivusärmän ja pohjasärmän välinen kulma?
Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

TEHTÄVÄSARJOJA

SARJA A

1. Kuinka korkealle keinulauta nostaa
a) lapsen b) aikuisen?



2. Ympyrän muotoisen uima-altaan halkaisija on 15,0 m. Allas ympäröidään joka kohdasta yhtä leveällä laatoituksella. Kuinka leveä laatoituksesta tulee, kun laattoja on käytettävissä 125 m^2?

3. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin sivutahkot ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden huippukulma on 82° ja kylki 7,2 cm. Laske pyramidin tilavuus.

4. Kolmion ABC sivuilta BA ja CA tai tarvittaessa niiden pisteen A yli meneviltä jatkeilta valitaan pisteet P ja Q niin, että $BP = CQ = BC$. Olkoon R janojen BQ ja CP tai niiden jatkeiden leikkauspiste. Osoita, että kolmion BCR kulma R on kolmion ABC kulmien B ja C keskiarvo.

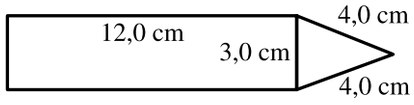
5. Pöydälle on asetettu neljä samankokoista kuutiota, jotka koskettavat toisiaan särmistä niin, että kuutioiden keskelle jää samankokoisen kuution muotoinen tyhjä tila. Kuutioiden särmän pituus on 8,0 cm. Kuutioiden varaan, tyhjän tilan päälle, asetetaan pallo, jonka halkaisija on 10,0 cm. Laske syntyvän rakennelman korkeus.

6. Kun vene oli etääntynyt luodosta 7,2 km, luodolla olevan loiston ja majakan väli näkyi 28°:n kulmassa. Merikortin mukaan luodon etäisyys majakasta on 3,9 km. Kuinka kaukana vene oli majakasta?

SARJA B

1. Veden syvyys veneen ankkuripaikalla on 27 m. Ankkuriköyden pituus on 36 m. Kuinka suurella alueella vene ajelehtii?

2. Pahvista on leikattu suoran kolmisivuisen särmiön toinen pohja ja yksi vaippatahko. Laske särmiön koko vaipan pinta-ala ja särmiön tilavuus.



3. Saarella sijaitsevan 850 m korkean vuoren huippu näkyy laivasta suoraan etelässä 8,1°:n korkeudella. Saaren toisella puolella on laiva, josta huippu näkyy suoraan koillisessa 6,7°:n korkeudella. Mikä on laivojen etäisyys toisistaan?

4. Pohjallaan seisovan kartion muotoinen 25 cm korkea kynttilä sytytettiin kello 18.00. Kello 20.00 kynttilän korkeus oli 18 cm. Mihin aikaan kynttilän korkeus on 13 cm? Palamiseen kulunut aika on suoraan verrannollinen palaneen osan tilavuuteen.

5. Arkkitehti on suunnitellut suoran ympyräkartion muotoisen vesitornin sellaiseksi, että vesitornin sivukuva etäältä katsottuna on tasasivuinen kolmio. Säiliön tilavuus on 1 200 m^3. Määritä desimetrin tarkkuudella säiliön korkeus ja pohjan halkaisija.

6. Pallo sivuaa kuution yhtä tahkoa ja vastakkaisen tahkon jokaista särmää. Kuinka suuri osa pallon pinnasta on kuution ulkopuolella?

SARJA C

1. Kun aurinko laskee alle $12°$:n korkeudelle, ympyrän muotoinen $8{,}0$ m korkean muurin ympäröimä piha-alue peittyy kokonaan varjoon. Kuinka suuri pihan pinta-ala on?

2. Helsingin ja Moision keskustat sijaitsevat samalla pituuspiirillä $24°56'$ itäistä pituutta, Helsingin keskusta leveyspiirillä $60°9'$ pohjoista leveyttä ja Moision $62°26'$ pohjoista leveyttä. Kuinka korkealla Helsingin yläpuolella olevasta lentokoneesta voisi periaatteessa nähdä Moisioon?

3. Neliön $ABCD$ kärkipisteet ovat ympyrän kehällä ja piste P on neljännesympyrän kaarella pisteiden A ja B välissä. Kuinka suuri kulmien PDA ja PCB summa on?

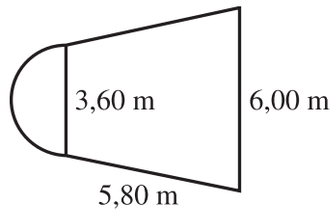
4. Nurmikenttä on 142 metriä pitkä ja 86 metriä leveä suorakulmio. Kentän poikki kulkee kaksi suoraa polkua, jotka risteävät kohtisuorasti. Toinen polku kulkee pitkin kentän lävistäjää. Laske polkujen pituudet.

5. Kompassisuuntaan $110°$ tasaisella nopeudella kulkeva laiva näkyi vuorelta 890 m:n korkeudelta eräällä hetkellä pohjoisessa $7{,}8°$ silmäntason alapuolella. 12 minuuttia myöhemmin laiva näkyi koillisessa. Mikä laivan nopeus oli? Kompassisuunta on kulma pohjoissuunnasta myötäpäivään.

6. Neljä tennispalloa, joiden säde on $3{,}4$ cm, pakataan umpinaiseen muovikalvoon niin, että pallojen keskipisteet muodostavat neliön. Kalvo on kireä, mutta ei mistään kohdasta sisäänpäin painunut. Laske kalvon pinta-ala.

SARJA D

1. Koripallokentän vapaaheittoalue muodostuu puoliympyrästä ja tasakylkisestä puolisuunnikkaasta. Laske vapaaheittoalueen pinta-ala.



2. Suoran ympyrälieriön muotoinen säiliö, jonka pohjan halkaisija on 225 cm, täyttyy vesihanasta 2 tunnissa 40 minuutissa. Missä ajassa täyttyy samasta hanasta säiliö, jonka korkeus on kaksinkertainen ja pohjan halkaisija 135 cm?

3. Maalari Albrecht Dürer (1471–1528) antoi seuraavan käytännön ohjeen säännöllisen seitsenkulmion piirtämisestä ympyrän sisään: ”Sisään piirretyn säännöllisen seitsenkulmion sivu on puolet sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sivusta.” Kuinka tarkka tämä ohje on?

4. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusaa BC jatketaan molemmista päistä samaan kärkeen päättyvän kateetin pituisella janalla. Näin muodostuvan janan päätepisteet E ja F yhdistetään pisteeseen A. Osoita, että kulman EAF suuruus ei riipu kolmion ABC terävien kulmien suuruudesta.

5. Katkaistun suoran ympyräkartion muotoisen tukin pituus on $8{,}6$ m sekä läpimitta tyvipäässä 42 cm ja latvapäässä 10 cm. Kuinka pitkä poikkileikkaukseltaan neliön muotoinen kuuden tuuman hirsi tukista saadaan? Yksi tuuma on noin $2{,}5$ cm.

6. Rautatie paikasta A paikkaan B kulkee ensin 17,0 km suoraan, kääntyy sitten 3,0 kilometrin matkalla tasaisesti kaartaen 48° ja kulkee taas loppumatkan 31,0 km suoraan. Kuinka paljon suunniteltu uusi suora rata A:sta B:hen lyhentäisi matkaa?

SARJA E

1. Kellarikomeroon, jonka mitat ovat 1,60 m ja 2,45 m, rakennetaan 65 cm:n syvyinen hyllykkö. Kuinka leveä hyllykkö saa enintään olla, jotta sen voisi tarvittaessa työntää lattiaa pitkin seinältä toiselle?

2. Onton teräskuulan ulkoläpimitta on 18,1 cm ja seinämän paksuus 0,70 cm. Laske kuulan massa. Teräksen tiheys on 7 850 kg/m^3.

3. Laivasta havaittiin majakka A 72° laivan kulkusuunnan vasemmalla puolella ja majakka B 22° kulkusuunnan oikealla puolella. Merikortin mukaan majakoiden kautta kulkeva suora muodostaa 35°:n suuruisen kulman laivan kulkusuunnan kanssa ja väli AB on 16,4 kilometriä. Mikä oli laivan etäisyys majakasta A havaintohetkellä?

4. Kuinka suuret säännöllisen nelisivuisen pyramidin vaippakolmioiden kulmat ovat, jos pyramidin a) vastakkaiset sivusärmät b) vastakkaiset sivutahkot ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

5. Merialuetta valvovan tutkan näkökenttä on ympyrän muotoinen ja ulottuu 48 kilometrin päähän tutka-asemasta. Tutkan näkökenttään saapui suoraviivaisesti kulkeva laiva, joka kuljettuaan näkökentässä 41 kilometriä oli 32 kilometrin päässä tutka-asemasta. Kuinka pitkän matkan laiva kulkee tutkan näkökentässä?

6. Suoran ympyräkartion vaippa sivuaa palloa pitkin ympyrää, jonka säde on kolmasosa pallon säteestä. Kartion vaippa levitetään tasoon. Kuinka suuri muodostuvan ympyräsektorin keskuskulma on?

Vastaukset

Kulma

1. $\alpha = \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBA$,
$\beta = \sphericalangle C = \sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD = \ldots$

2. a) kupera b) kovera ja terävä
c) kupera d) kovera ja tylppä

3. a) 83,47° b) 7,9058°

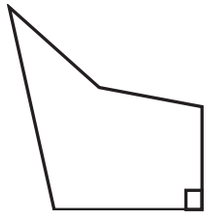
4. $\alpha = 58°$, $\beta = 122°$

5. a) $\alpha_2 = \alpha_4 = 52°$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 128°$
b) Eivät ole, koska samankohtaiset kulmat eivät ole yhtä suuret.
(130°:n kulman vieruskulma, jonka suuruus on 50°, on samankohtainen 51°:n kulman kanssa.)

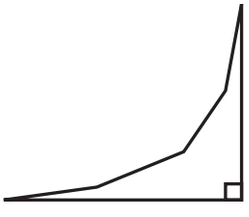
6. a) $\alpha = 70°$ ja $\beta = 110°$
b) $\alpha = 63°$ ja $\beta = 67°$

7. a) koilliseen b) lounaaseen
c) suuntaan 9° d) suuntaan 287°
e) $\alpha + 180°$, kun $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, ja
$\alpha - 180°$, kun $180° \leqslant \alpha \leqslant 360°$
(Kompassisuunnat 0° ja 360° ovat sama suunta kohti pohjoista.)

8. a) esimerkiksi



b) esimerkiksi



9. a) 60,302° b) 19,137°

10. a) 72° 50′ b) 72° 49′ 33″

11. 119°

12. $\alpha = 38°$, $\beta = 31°$ ja $\gamma = 111°$

13. $\alpha = 35°$, $\beta = 74°$ ja $\gamma = 71°$
($\alpha = 180° - 74° - 71°$, β on samankohtainen 74°:n kulman kanssa ja γ on samankohtainen 71°:n kulman kanssa.)

14. a) Kulman β vieruskulma γ on kulman α kanssa samankohtainen kulma. Koska suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset, niin $\gamma = \alpha$. Koska $\beta + \gamma = 180°$, niin myös $\beta + \alpha = 180°$.
b) Koska kulman β ja sen vieruskulman γ summa on oikokulma, niin $\gamma = 180° - \beta$. Koska kulmien α ja β summa on oikokulma, niin myös $\alpha = 180° - \beta$. Koska samankohtaiset kulmat α ja γ ovat yhtä suuret, niin suorat L_1 ja L_2 ovat yhdensuuntaiset.

15. $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle B = 75°$, $\sphericalangle C = 35°$

16. 12.16.22 ja 12.49.05
(Kun kello 12:sta on kulunut x tuntia, tuntiviisari on kiertynyt $30x$ astetta ja minuuttiviisari $360x$ astetta. Kysytyt ajat ratkaistaan yhtälön avulla.)

Suunnikkaan ja kolmion kulmat

17. $\sphericalangle B = 157°$, $\sphericalangle C = 23°$, $\sphericalangle D = 157°$

18. a) 96° b) 125°

19. a) 43°:n kulmassa
b) 55°:n kulmassa

20. a) 146° b) 34°

21. Kolmio ABC on tasakylkinen, joten $\sphericalangle ACB = \alpha$. Siis $\gamma = 180° - 2\alpha$ ja vieruskulma $\beta = 180° - \gamma = 2\alpha$.

22. Merkitään korkeusjanan ja kannan välistä kulmaa α ja tasakylkisen kolmion huippukulmaa β, jolloin tehtävä on osoittaa, että $\beta = 2\alpha$. Voidaan esimerkiksi merkitä tasakylkisen kolmion kantakulmaa γ ja ilmaista ensin γ ja sitten β kulman α avulla.

23. 54°
(Koska kolmion muiden kulmien suuruutta ei tiedetä, tehtävä tulee ratkaista yleisesti esimerkiksi seuraavasti: Merkitään kolmion kahta muuta kulmaa α ja β. Kolmiossa, jonka rajaavat puolittajat ja 72°:n kulman vastainen sivu, puolittajien välinen kulma on $180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Sijoitetaan tähän $\alpha + \beta = 108°$.

24. a) 720° b) 900°
c) 108° d) 135°

25. a) Enintään kaksi, sillä kolmen kuperan kulman summa olisi suurempi kuin 540°.
b) Enintään kolme, sillä neljän suoran kulman summa olisi 360°, jolloin viides kulma olisi oikokulma.

26. 150°

27. 76°
(Voidaan ratkaista eri tavoin yhtälön avulla. Jos esimerkiksi kantakulman puolikas on α, niin $\alpha + 2\alpha + (180° - 78°) = 180°$.)

28. Valonsäde kohtaa toisen peilin 80°:n kulmassa, heijastuu takaisin ensimmäiseen peiliin, kohtaa ja jättää sen 30°:n kulmassa ja poistuu peileistä.

29. a) 25° b) 142°

30. a) 38°:n kulmassa
b) suorassa kulmassa
(Tasakylkisen kolmion huipusta kannalle piirretty keskijana on myös korkeusjana (ja huippukulman puolittaja), sillä kolmio on symmetrinen ao. janan suhteen.)

31. 50° 57′ 48″
(Tunnettujen kulmien summa on 129° 2′ 12″.)

32. Esimerkiksi näin: Merkitään ylinnä olevaa kulmaa γ. Tällöin $\alpha = 180° - 90° - \gamma$ ja $\beta = 180° - 90° - \gamma$, joten $\alpha = \beta$.

33. Esimerkiksi näin: Kuviossa on kaksi tasakylkistä kolmiota joiden huippukulmat ovat α ja β. Kulma ACB on kolmioiden kantakulmien $90° - \frac{\alpha}{2}$ ja $90° - \frac{\beta}{2}$ summa. Muodostetaan summa ja käytetään hyväksi tietoa $\alpha + \beta = 180°$.

34. Esimerkiksi näin: Merkitään suunnikkaan vierekkäisiä kulmia α ja β. Kulmien puolittajien ja yhden suunnikkaan sivun muodostamassa kolmiossa kulmien puolittajien välinen kulma on $180° - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2})$. Käytetään hyväksi tietoa $\alpha + \beta = 180°$.

35. Merkitään kolmiossa ABC esimerkiksi $\sphericalangle B = \beta$ ja $\sphericalangle C = \gamma$. Tasakylkisistä kolmioista nähdään, että kolmion PAQ kaksi muuta kulmaa ovat $90° - \frac{\beta}{2}$ ja $90° - \frac{\gamma}{2}$. Muodostetaan ja sievennetään kolmannen kulman lauseke.

36. $\sphericalangle A = 90°$ ja $\sphericalangle C = 30°$
(Piirretään kärjestä A alkava kolmion keskijana (mediaani) ja tutkitaan muodostuvia kolmioita.)

37. a) $\beta = 135° - \frac{3}{4}\alpha$, $0° < \beta < 135°$

b) $\alpha = 77\frac{1}{7}°$ tai $\alpha = 36°$

(Kaksi vaihtoehtoa: α ja β ovat kantakulmia tai β on huippukulma. Kulma α ei voi olla huippukulma, koska sivu AD on lyhyempi kuin AB.)

38. Merkitään nelikulmion vierekkäisiä kulmia α ja β. Koska $2\alpha + 2\beta = 360°$ (nelikulmion kulmien summa), niin vierekkäisten kulmien summa on oikokulma. Vastakkaisten sivujen yhdensuuntaisuus päätellään yhtä suurista samankohtaisista kulmista.

39. a) Eri sivuja jatkettaessa muodostuvat ulkokulmat ovat toistensa ristikulmia.
b) Merkitään kolmion kulmia esimerkiksi α, β ja γ. Tällöin ulkokulmien summa on $(180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma)$. Sievennetään lauseke ja sijoitetaan kolmion kulmien summa.
c) Merkitään n-kulmion kulmia esimerkiksi α_1, α_2, ... , α_n. Tällöin ulkokulmien summa on $(180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + ... + (180° - \alpha_n)$. Sievennetään lauseke ja sijoitetaan n-kulmion kulmien summa.

40. Merkitään keskellä olevan viisikulmion kulmia kiertojärjestyksessä esimerkiksi α_1, α_2, α_3, α_4 ja α_5. Tällöin sakaroiden kulmat ovat $180° - (180° - \alpha_1) - (180° - \alpha_2)$ jne. Muodostetaan ja sievennetään sakarakulmien summa ja käytetään hyväksi viisikulmion kulmien summaa.

Yhdenmuotoisuus

41. a) 13 m b) 5,4 m c) 73°

42. a) 1 200 m = 1,2 km
(Jos x on etäisyys luonnossa, niin $\frac{8{,}2\text{ cm}}{x} = \frac{1}{15\,000}$. Koska tehtävän mittaluku 8,2 cm on annettu kahden numeron tarkkuudella, myös vastaus pyöristetään kahden numeron (1200) tarkkuuteen.)
b) 4,1 km
c) 48 cm
(Jos x on etäisyys kartalla, niin $\frac{x}{96\text{ km}} = \frac{1}{200\,000}$. Useimmat laskimet näyttävät tuloksen kymmenpotenssimuodossa: $4{,}8 \cdot 10^{-4}$ km = 0,00048 km.)
d) 2,1 cm

43. 32 m

44. 5,3 m $\left(\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}\right)$

45. $6\frac{2}{13}$

46. 44 cm:n korkeudella
(Kolmioiden korkeusjanat ovat toistensa vastinjanoja.)

47. 4,2 m

48. $1\frac{5}{7}$
(Muodostuvissa yhdenmuotoisissa kolmioissa korkeuksien ja kantojen suhteet ovat yhtä suuret eli jos neliön sivu on x, niin $\frac{4-x}{4} = \frac{x}{3}$.
Tai toisella tavalla: jos molemmissa kolmioissa muodostetaan korkeuden suhde kantaan, niin suhteet ovat yhtä suuret: $\frac{4-x}{x} = \frac{4}{3}$.
Vastaukseksi on annettava sivun pituuden tarkka arvo.)

49. 31 cm

50. a) 29,7 cm $(21\sqrt{2}$ cm)
b) 29,3 %
(Pienennetyllä arkilla olevat kirjaimet ovat yhdenmuotoisia alkuperäisten kanssa suhteessa $\frac{21{,}0}{29{,}7} \approx 0{,}707$.)

51. a) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADC$ (suoria kulmia) ja $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCA$ (yhteinen kulma), joten kolmiot ABC ja DAC ovat yhdenmuotoiset (kk).
b) D c) A d) AC
e) DC f) 2,4

52. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EDC$ (suoria kulmia) ja $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCE$ (yhteinen kulma), joten kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset (kk).
$DE = 3\frac{3}{4}$

53. 3,1 km tiestä L_1 ja 4,9 km tiestä L_2

54. 7,5 m

55. $AB = 5$, $AC = 6\frac{2}{3}$

56. $1\frac{2}{3}$

57. a) Merkitään kolmion kärkipisteitä A, B ja C, missä A on kolmion ”huippu”. Olkoot AD ja BE kolmion korkeusjanoja. Kolmioissa ADC ja BCE on molemmissa suorakulma, ja alkuperäisen kolmion kulma C on kolmioiden yhteinen kulma, joten kolmiot ADC ja BCE ovat yhdenmuotoiset (kk).
b) Osat ovat pisteestä A lukien 13 ja 2.
c) Osat ovat huipusta lukien 7 ja 2.

58. Ei voida.
(Tornista havaittaisiin vasta yli 180 cm pitkä henkilö.)

59. keskeltä tai 4,0 cm:n päästä päädystä

60. 3,0 m
(Ensin lasketaan kohtaamispisteen etäisyys jommastakummasta pylväästä.)

61. Korkeus, jolla vaijerit kohtaavat, on $\frac{ab}{a+b}$.
Korkeus riippuu siis vain pylväiden korkeuksista a ja b.
(Merkitään pylväiden etäisyyttä esimerkiksi c, ja lasketaan ensin kohtaamispisteen etäisyys jommastakummasta pylväästä.)

62. 2°: Kolmioissa BPD ja CQD on ristikulmat ja suorakulma, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).
Kolmioissa APB ja AQC on molemmissa suorakulma ja kolmion ABC kulman A puolikas, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).
3°: Koska kolmiot BPD ja CQD ovat yhdenmuotoiset, niin $\frac{BD}{CD} = \frac{BP}{CQ}$.
Koska kolmiot APB ja AQC ovat yhdenmuotoiset, niin $\frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{AC}$. Siis $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

63. Kärjestä B alkava osa on $2\frac{2}{11}$ ja toinen osa $3\frac{9}{11}$.

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde

64. a) 25-kertaiseksi
b) 144-kertaiseksi

65. a) kolminkertaisiksi (Jos kuvion mitat suurennetaan k-kertaisiksi, pinta-ala tulee k^2-kertaiseksi. Tulee olla $k^2 = 9$.)
b) $\sqrt{2}$ -kertaisiksi eli noin 1,4-kertaisiksi

66. 38,1 %

67. $\frac{7}{9} \approx 0{,}78$
(Koska pikkuympyrän halkaisijan suhde ison ympyrän halkaisijaan on $\frac{1}{3}$, niin ympyröiden pinta-alojen suhde on $\frac{1}{9}$.)

68. a) 78 ha (Yhtälöstä $\frac{3{,}1}{A} = \left(\frac{1}{50\,000}\right)^2$ saadaan alueen pinta-ala neliösenttimetreinä.)
b) 58 cm^2 ($\frac{A}{2{,}3} = \left(\frac{50}{1}\right)^2$)

69. $\frac{4}{25}$

70. 50 cm ($\left(\frac{x}{25}\right)^2 = \frac{300}{75}$)

71. a) $\frac{1}{2}a$
b) $\frac{1}{\sqrt{3}}a$ ($\approx 0{,}58a$)

72. kohta D 480 m ja kohta F 680 m
(Kolmion AFG pinta-ala on $\frac{2}{3}$ kolmion ABC pinta-alasta.)

73. a) $\frac{1}{25}$ b) $\frac{25}{9}$

74. $\frac{16}{49} \approx 0{,}33$

75. a) $\sqrt{3}$ -kertaisiksi eli noin 1,73-kertaisiksi

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -kertaisiksi eli noin 0,71-kertaisiksi

76. 80 %

77. 56 %

78. a) 19 aaria b) 8,43 m^2

79. 25 dm^2

(Erottuvan kolmion pinta-ala on $\frac{4}{9}$ koko kolmion pinta-alasta.)

80. 9,4 m

81. 750 m ja 1 140 m palstan kärjestä A

82. 72

Suorakulmaisen kolmion trigonometria

83. a) $\sin 50° \approx 0{,}77$, $\cos 50° \approx 0{,}64$ ja $\tan 50° \approx 1{,}2$
(Ensin piirretään hypotenuusa ja sen päihin 50°:n ja 40°:n kulmat.)
b) $\alpha \approx 22°$

84. a) 17,0 m b) 8,0 m c) 626 m

85. a) 7,16° b) 76°

86. 84 m

87. 410 m

88. 19,3 cm^2
(Kolmion pinta-ala on puolet kannan pituuden ja kannalle piirretyn korkeuden tulosta. Jos pinta-ala lasketaan kannan pituuden ja korkeuden likiarvojen avulla, likiarvot tulee laskea suuremmalla tarkkuudella (vähintään viidellä numerolla) kuin mikä on lopputuloksen tavoiteltu tarkkuus (kolme numeroa).

89. 36,8°:n kulmassa

90. 1,5 km $(\frac{89}{\tan 3{,}5°})$

91. a) 10,0 cm b) 34,2°

92. 3,13

93. 270 metrin päähän joen rannasta $(\frac{7{,}4}{\sin 1{,}6°})$

94. 16,5 m

95. 33,7°
(Pisteiden $(1, 3)$ ja $(1, -1)$ kautta kulkeva pystysuora ja pisteen $(6, -2)$ kautta kulkeva vaakasuora muodostavat kuvioon kaksi suorakulmaista kolmiota.)

96. a) 11,1 valovuoden
b) 1 pc $\approx 3{,}086 \cdot 10^{16}$ m $\approx 3{,}26$ valovuotta

97. a) 145 cm
b) noin 9 tai noin 18

98. 120 cm^2

99. 110 cm^2

100. kantakulmat 71°, huippukulma 38°

101. 130 m

102. a) 1,4 m b) 3,1 m

103. x-koordinaatti 0,9063, y-koordinaatti 0,4226
(x-koordinaatti on $\cos 25°$ ja y-koordinaatti on $\sin 25°$.)

104. a) 18,4° ja 71,6° b) 36,9°

105. vähintään 1,5 m

106. 30°

107. 4,1 m
(Kolmioon, jonka kahtena sivuna ovat antenni ja antennin varjo, piirretään antennia jatkava pystysuora ja varjon pään kautta kulkeva vaakasuora, jolloin saadaan kaksi suorakulmaista kolmiota.)

108. 13 m

109. lauseke $n \cdot \sin \frac{180°}{n}$

a) 3,141076 b) 3,141593

Pythagoraan lause

110. 4,3 m

111. 4,9 m

112. Ei voida, sillä sängyn lävistäjä 2,57 m on suurempi kuin huoneen leveys.

113. 29 m ja 43 m

114. a) 24 cm^2 b) $2\sqrt{5}\,a^2$

115. 6,7 cm

116. a) $\sqrt{29} \approx 5{,}39$

b) $\sqrt{61} \approx 7{,}81$

(Tarkka arvo on varsinainen vastaus. Likiarvo lasketaan havainnollistukseksi ja tarkistukseksi.)

117. a) hypotenuusan pituus $\sqrt{2}$,
pituuksien suhde $\sqrt{2} : 1$

b) 4,1 m $(2{,}9\sqrt{2})$

c) $3\sqrt{2}$

d) $\frac{a}{\sqrt{2}}$

e) 5,2 m $(\frac{7{,}3}{\sqrt{2}})$

118. kateetti $5\frac{5}{12}$ ja hypotenuusa $14\frac{1}{12}$

(Korkeusjanan tunnetun kateetin puolelta erottaman hypotenuusan osan pituus (kateetin projektio hypotenuusalle) saadaan Pythagoraan lauseella. Kysytyt osat saadaan käyttämällä Pythagoraan lauseen todistuksessa havaittua kolmioiden yhdenmuotoisuutta.)

119. 15,3 m
(Kun piirretään tyviosaa jatkava pystysuora ja latvan kautta kulkeva vaakasuora, muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota.)

120. 54 cm ja 96 cm
(Yhtälö $x^2 + (1{,}5 - x)^2 = 1{,}1^2$.)

121. 30 m

122. 6,5 cm

123. 77 cm

124. a) $\frac{15}{17}$ b) $\frac{15}{8}$

(Koska kyljen ja kannan pituutta ei tiedetä, niitä on merkittävä esimerkiksi $17a$ ja $16a$. Huipusta kannalle piirretty korkeus on tällöin $15a$.)

125. a) $\frac{5}{\sqrt{34}}\,a$ ja $\frac{3}{\sqrt{34}}\,a$

b) piiri $2\sqrt{2}\,a$ $(\frac{4}{\sqrt{2}}\,a)$, pinta-ala $\frac{1}{2}\,a^2$

(Neliön sivun pituus voidaan ratkaista yhtälöllä $x^2 + x^2 = a^2$. Voidaan myös käyttää tehtävän 117 muistikolmiota, jonka mukaan neliön lävistäjän pituuden suhde neliön sivun pituuteen on $\sqrt{2} : 1$.)

126. 6,8 kilometriä C:stä

127. 17,4 km

128. a) Kolmiot ovat tasasivuisia.
(Jos tasakylkisen kolmion huippukulma on $60°$, niin myös kantakulmien suuruus on $60°$, joten kolmio on tasasivuinen.)

b) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

c) 4,3 cm

(Ratkaistaan a yhtälöstä $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 48$.)

129. Leikataan 3,5 cm:n päästä kulmista.
(Jos x on leikkauskohdan etäisyys kulmista, niin tulee olla $x\sqrt{2} = 12 - 2x$.)

130. $3\sqrt{5}$ $(\sqrt{45})$ ja $6\sqrt{5}$ $(\sqrt{180})$
(Korkeusjana jakaa hypotenuusan osiin, joiden pituudet ovat x ja $15 - x$. Koska muodostuvat pikkukolmiot ovat yhdenmuotoisia koko kolmion kanssa, ne ovat myös keskenään yhdenmuotoiset. Osien pituudet saadaan (toisen asteen) yhtälöstä $\frac{x}{6} = \frac{6}{15 - x}$.)

131. a) Jos $m^2 + n^2 = p^2$, niin $r^2m^2 + r^2n^2 = r^2p^2$ eli $(rm)^2 + (rn)^2 = (rp)^2$. Siis rm, rn, rp on Pythagoraan kolmikko. Kolmikkoja esimerkiksi 6, 8, 10; 9, 12, 15 ja 12, 16, 20. Koska jokaisella positiivisen kokonaisluvun r arvolla saadaan uusi kolmikko, kolmikkoja on ääretön määrä.

b) Osoitetaan, että
$(2p)^2 + (p^2 - 1)^2 = (p^2 + 1)^2$.
Kolmikkoja esimerkiksi
8, 15, 17; 10, 24, 26 ja 12, 35, 37.

132. Osoitetaan, että
$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$.
Kolmikkoja esimerkiksi
3, 4, 5 $(a = 2,\ b = 1)$,
5, 12, 13 $(a = 3,\ b = 2)$ ja
33, 56, 65 $(a = 7,\ b = 4)$.

133. a) Ei ole. Jos tasakylkisen suorakulmaisen kolmion kateettien pituus on kokonaisluku m, niin hypotenuusan pituus on $\sqrt{2}\,m$. Jos $\sqrt{2}\,m$ olisi kokonaisluku, $\sqrt{2}\,m = n$, niin olisi $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, mikä on mahdotonta, koska $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.

b) Kateettien $(2a + b)^2 - a^2$ ja $2(2a + b)a$ erotus sievenee muotoon $2ab - (a^2 - b^2)$. Melkein tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita ovat: 3, 4, 5; 21, 20, 29; 119, 120, 169 jne.

Tylpän kulman kosini ja sini

134. a) 0,8 ja 0,6
b) $-0{,}6$ ja 0,8

135. a) 1 b) 0,5
c) 0 d) $-0{,}64$ e) -1

136. a) 0 b) 0,5
c) 1 d) 0,17 e) 0

137. a) $73°$ b) $102°$
c) $30°$ ja $150°$ d) $53°$ ja $127°$

138. a) $110{,}5°$ b) $9{,}2°$ ja $170{,}8°$
c) $29{,}5°$ d) $49{,}5°$ ja $130{,}5°$

139. a) $173{,}7°$ b) $37{,}6°$
c) $116{,}7°$

140. a) terävä (Kulman kosini on positiivinen.)
b) tylppä (Kulman kosini on negatiivinen.)
c) kumpi tahansa

141. x-koordinaatti = $\cos 118° \approx -0{,}469$,
y-koordinaatti = $\sin 118° \approx 0{,}883$

142. a) $\cos 108° \approx -0{,}309$, ei millään
b) $\sin 155° \approx 0{,}423$, $25°$:n kulmalla
c) $\sin 81° \approx 0{,}988$, $99°$:n kulmalla

143. a) $\sin(180° - \alpha) = 0{,}6$ ja
$\cos(180° - \alpha) = -0{,}8$
b) $\sin(180° - \alpha) = 0{,}28$ ja
$\cos(180° - \alpha) = 0{,}96$

144. a) 80,2° b) 118,7°
c) 14,5° ja 165,5°
d) Minkään välin $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ kulman sini ei ole negatiivinen.

145. a) 106,3° b) 9,2°
c) 46,1° ja 133,9°

146. a) $a = c \sin(180° - \alpha) = c \sin \alpha$, sillä sinin symmetrialauseen nojalla $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$
b) $b = c \cos(180° - \alpha) = -c \cos \alpha$, sillä kosinin symmetrialauseen nojalla $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$.

147. a) Merkitään suorakulmaisessa kolmiossa kulman α vastaista kateettia esimerkiksi a, viereistä kateettia b ja hypotenuusaa c.

Tällöin $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ ja $\tan \alpha = \frac{a}{b}$.

Koska $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$, niin

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

b) Puoliympyrän mukaan $\sin 110° \approx 0{,}94$ ja $\cos 110° \approx -0{,}34$, joten

$\tan 110° \approx \frac{0{,}94}{-0{,}34} \approx -2{,}8$.

Laskimen mukaan $\tan 110° = -2{,}7474 \ldots$.

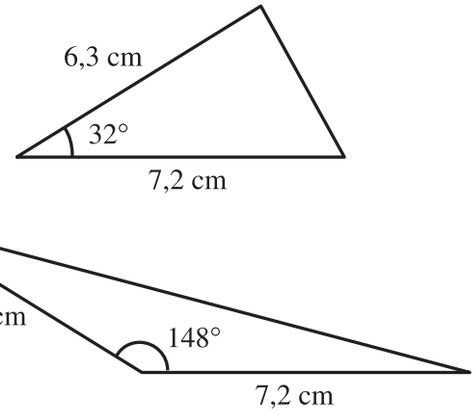
Pinta-aloja

148. a) 6,1 cm^2
b) 11 cm^2

149. a) 12 m^2 b) 23 m^2

150. pinta-ala 35,6 cm^2
Sama pinta-ala on kolmiolla, jossa sivujen välinen kulma on 13°.

151. 32° tai 148°
(Kuvioissa mitat ovat puolet todellisista.)



152. 39,5° tai 140,5°

153. a) 17 cm^2 b) 42 cm^2
c) 12° tai 168°

154. 3,7 cm

155. 4 tai $2\sqrt{13}$ ($\sqrt{52}$)
(Puolisuunnikkaan korkeus on 4. Vaihtoehdot ovat, että sivu, jonka pituus on 5, muodostaa terävän tai tylpän kulman saman yhdensuuntaisen sivun kanssa.)

156. 52
(Kun lyhyemmän sivun päätepisteestä piirretään kohtisuora pitemmälle sivulle, muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on $(16 - 10) : 2 = 3$.)

157. 21 m^2

158. 39° tai 141°

159. a) $17\ \text{cm}^2$ b) $22°$ tai $158°$

160. $42{,}6°$ ja $137{,}4°$

161. $10{,}4\ \text{cm}^2$

162. 13,4 ha

163. lauseke $A_n = \frac{n}{2} \cdot \sin\frac{360°}{n}$,
pinta-alat 3,14157 ja 3,14159

Hypoteesi: 1-säteisen ympyrän pinta-ala on π.

164. a) Oletetaan ensiksi, että lävistäjät leikkaavat nelikulmion sisällä ja että u jakautuu osiin u_1 ja $u - u_1$ ja v osiin v_1 ja $v - v_1$. Olkoon α esimerkiksi osien u_1 ja v_1 välinen kulma, jolloin toinen lävistäjien välinen kulma on $180° - \alpha$. Ilmaistaan nelikulmion pinta-ala neljän kolmion pinta-alojen summana, käytetään sinin symmetrialausetta ja sievennetään. Oletetaan toiseksi, että lävistäjät leikkaavat lävistäjän u jatkeella ja että jatkeen pituus on u_1. Pinta-ala on nyt kahden kolmion pinta-alojen summa vähennettynä kahden kolmion pinta-alalla.
b) 15 ha ja 6,7 ha

Sinilause

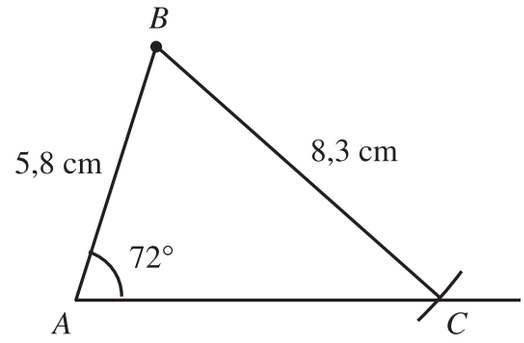
165. $61°$:n kulman vastainen sivu 15,7 cm, kolmas sivu 12,0 cm

166. 2,5 km
(Jos x on kysytty etäisyys, niin $\frac{x}{\sin 46°} = \frac{3{,}4}{\sin 76°}$.)

167. 71 m

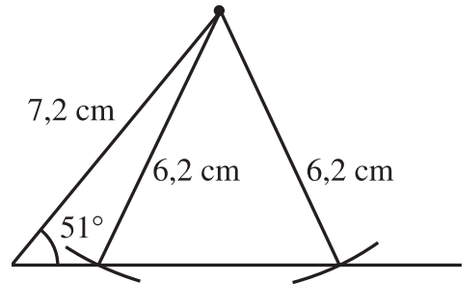
168. 310 m

169.



Ehdot täyttäviä kolmioita on vain yksi.
$\sphericalangle C \approx 42°$, $\sphericalangle B \approx 66°$, $AC \approx$ 8,0 cm
(Kuviossa sivujen pituudet ovat puolet todellisista.)

170. Kuvatut ehdot täyttäviä kolmioita on kaksi.



Teräväkulmainen kolmio, jossa 7,2 cm:n pituisen sivun vastainen kulma on $64{,}5°$, kolmas kulma on $64{,}5°$ ja kolmas sivu 7,2 cm, ja tylppäkulmainen kolmio, jonka kulmat ovat vastaavasti $115{,}5°$ ja $13{,}5°$ ja kolmas sivu 1,9 cm.
(Kuviossa sivujen pituudet ovat puolet todellisista.)

171. 3,9 km:n tai 9,8 km:n etäisyydellä

172. 282 m

173. $32°$:n kulman vastainen sivu 5,4 cm ja $81°$:n kulman vastainen sivu 10,0 cm

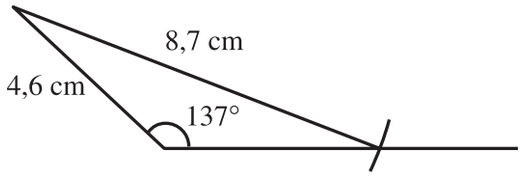
174. $20{,}7\ \text{cm}^2$

175. 8,1 km

176. 13 km:n korkeudella

177. 3,7 km

178. Kuvatut ehdot täyttäviä kolmioita on yksi.



Kolmiossa on 4,6 cm pitkän sivun vastainen kulma 21,1°, kolmas kulma 21,9° ja kolmas sivu 4,8 cm.
(Kuviossa pituudet ovat puolet todellisista.)

179. $72 \cdot 10^6$ km tai $150 \cdot 10^6$ km

180. 1,37 km

181. 760 m

182. 1 923 m

183. a) Kaksi, kun $a \sin\alpha < b < a$.
Yksi, kun $b = a \sin\alpha$ tai $b \geqslant a$.
Ei yhtään, kun $b < a \sin\alpha$.
b) Ei koskaan kahta. Yksi, kun $b > a$.
Ei yhtään, kun $b \leqslant a$.

184. Jos α on sivun a vastainen kulma ja β sivun b vastainen kulma, niin sinilauseen mukaan $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Yhtälö kerrotaan $\sin\alpha$:lla ja jaetaan b:llä.

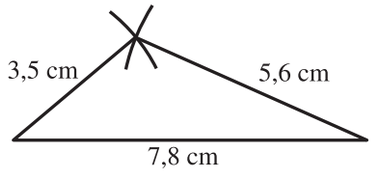
185. Oletetaan, että kolmion ABC kulman A puolittaja leikkaa vastakkaisen sivun pisteessä D. Merkitään $BD = u$, $CD = v$ ja $AD = d$ sekä kolmion kulman A puolikasta α, kulmaa B β ja kulmaa C γ. Edellisen tehtävän mukaan $\frac{u}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ja $\frac{v}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$. Suhteista seuraa, että $\frac{u}{v} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$, ja väite seuraa, kun sovelletaan uudestaan edellisen tehtävän lausetta.

Kosinilause

186. 5,1 m

187. 40 km

188. 116°



(Kuvion mitat ovat puolet todellisista. Kolmion suurin kulma on aina pisimmän sivun vastainen kulma.)

189. a) $\frac{1}{9}$ b) 83,62°

190. Suorakulma on niiden sivujen välinen kulma, joiden pituus on
a) $\sqrt{5}$ ja $2\sqrt{5}$ b) 3 ja $\sqrt{3}$.

191. 13,5 m (Tyven ja maanpinnan välinen kulma on 78°.)

192. 1,9 km^2
(Ratkaistaan yksi kulma, minkä jälkeen voidaan käyttää kolmion pinta-alan trigonometrista kaavaa.)

193. 13,7 km
(Etäisyys BD saadaan sinilauseella ja kysytty etäisyys sen jälkeen kosinilauseella.)

194. 18,02 m
(Etäisyydestä CB vähennetään kuulaympyrän säde.)

195. a) $AB \approx 8{,}1$ m, $\sphericalangle A \approx 79°$, $\sphericalangle B \approx 43°$
b) $\sphericalangle A \approx 43°$, $\sphericalangle B \approx 99°$, $\sphericalangle C \approx 38°$

196. a) $AB \approx 9{,}1$ m, $AC \approx 5{,}9$ m, $\sphericalangle C = 88°$
b) $AB \approx 7{,}4$ m, $AC \approx 12{,}4$ m, $\sphericalangle A = 131°$
(Osat ratkaistaan sinilauseella.)

197. 21 km

198. 49,7°

199. a) On. Hypotenuusa on sivu, jonka pituus on 6.
b) On. Hypotenuusa on sivu, jonka pituus on $a + 1$.

200. 6,7 cm ja 12,7 cm

201. 1,6 km

202. 14 km:n päähän, kompassisuunnalla 20°

203. 5,0 ha

204. 1 400 m^2

205. Piirretään korkeusjana sivulle a ja merkitään sivusta a erottuvaa kulman γ puoleista osaa u. Ilmaistaan muodostuvista suorakulmaisista kolmioista korkeuden neliö h^2 kahdella eri tavalla: $h^2 = c^2 - (a - u)^2$ ja $h^2 = b^2 - u^2$. Oikeat puolet merkitään yhtä suuriksi, ratkaistaan c^2 ja sijoitetaan $u = b \cos \gamma$.

206. 3 500 cm^2
(Yhdensuuntaisten sivujen ja lävistäjien osien muodostamat ristikkäiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset.)

Ympyrä

207. 88 m^2

208. a) 1 100 m^2 eli 11 aaria
(Säde on $\frac{120}{2\pi}$ metriä.)
b) 170 m (Säde on $\sqrt{\frac{2300}{\pi}}$ metriä.)

209. a) $\frac{\pi}{4} \approx 79\ \%$
(Koska neliön sivun pituutta ei tunneta, sitä on merkittävä kirjaimella, esimerkiksi a. Kysytty suhde on ympyrän kehän pituuden πa suhde neliön piiriin $4a$.)
b) $\frac{\pi}{4} \approx 79\ \%$
(Ympyrän pinta-alan $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$ suhde neliön pinta-alaan a^2.)

210. a) 25,7 cm b) 57,3°

211. 100 km
(Suoran tunnelin pituus on kaupunkeja yhdistävä jänne ympyrässä, jonka kehän pituus on 40 000 km. Etäisyys 4 650 km on kaaren pituus.)

212. 3,9 m^2
(78°:n sektorin pinta-alasta vähennetään tasakylkisen kolmion pinta-ala.)

213. 30 cm
(Sirpaleen leveys 24 cm on poikkileikkausympyrään piirretyn segmentin jänne, ja korkeus 6 cm on segmentin korkeus. Ympyrän säde ratkaistaan Pythagoraan lauseella.)

214. 116,0 mm^2

215. a) pinta-ala $(1 - \frac{\pi}{4})a^2$, suhde $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}21$
b) pinta-ala $(\frac{\pi}{2} - 1)a^2$, suhde $\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$

216. a) 15,8 m (Yhtälö $3x + \frac{1}{2} \cdot \pi x = 72$.)
b) 18,0 m (Yhtälö $x^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 450$.)

217. 0,60 % suurempi kuin oikea pinta-ala.
(Väitteen mukaan ympyrän pinta-ala on $\frac{256}{81} r^2$.)

218. 53 m^2

219. 9 550 m^2
(Oletetaan, että suorat osuudet on mitattu metrin tarkkuudella.)

220. a) 63 km b) 63 km c) 63 km
(Erotus on aina 20π km.)

221. a) $\frac{2}{\sqrt{5}}r$
(Neliön sivun pituus saadaan yhtälöllä $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = r^2$.)

b) $\frac{8}{5\pi} \approx 50{,}9\ \%$

222. 275 cm

223. 280 m

224. 19 cm^2

225. 13,4 cm

226. a) $3\frac{1}{3}$ (Yhtälö $r^2 = (6 - r)^2 + 2^2$.)

b) $9\frac{19}{30}$
(Tasakylkisen kolmion korkeus on 15.)

227. Antenni pystytetään A:sta alkavalle korkeusjanalle 20 kilometriä taajamasta A.
(Koska antennin tulee olla yhtä etäällä kaikista pisteistä A, B ja C, se tulee pystyttää pisteiden kautta kulkevan ympyrän keskipisteeseen.)

228. 29,2 %
(Jos r on ympyrän säde, niin segmentin jänteen pituus on $\frac{2\sqrt{8}}{3}r$. Vastaavan sektorin keskuskulma on noin 141,058°.)

229. 660 m^2
(Alue muodostuu kahdesta 45°:n sektorista ja kolmiosta.)

230. 39 %
(Kolmio, jonka kärkinä ovat keskipisteet ja toinen leikkauspiste, on tasasivuinen. r-säteisestä ympyrästä vähennetään siis 120°:n segmentti kaksinkertaisena.)

231. säde 10,8 cm ja jänne 19,3 cm tai
säde 3,6 cm ja jänne 6,5 cm

232. a) Lauseke on $n \sin\frac{180°}{n}$. Arvot lähenevät lukua π, sillä monikulmion piiri lähenee ympyrän kehän pituutta ja kehän pituus on π.

b) Lauseke on $n \sin\frac{180°}{n}$ eli sama kuin a-kohdassa. Siis myös pinta-alan lausekkeen arvot lähenevät lukua π. Pinta-ala on π.

c) πr^2
(Käytetään yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhdetta.)

Ympyrän tangentti

233. 31 km:n päähän
(Voidaan laskea viivasuora etäisyys tornista 75 m:n korkeudelta, sillä näin lyhyellä matkalla tornin juuresta etäisimpään kohtaan kulkevan maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus on käytännössä sama.)

234. 49°

235. 5,9

236. Voidaan. (Näkökenttä ulottuu 150 km:n päähän Kajaanista.)

237. a) 382 000 km
b) 7,2 metrin etäisyydeltä

238. vähintään 240 m korkeiksi
(Lyhimpiä torneja yhdistävä jana sivuaa keskipisteessään poikkileikkausympyrää.)

239. 210 m

240. 12 (Ratkaistaan yhdenmuotoisista kolmioista saatavan yhtälön avulla.)

241. a) 6 b) 5 c) 10
(Piirretään r-säteisen ympyrän keskipisteestä tangentit ulkopuolelle piirretylle sivuavalle ympyrälle ja määritetään tangenttien välinen ympyrän keskuskulma.)

242. 17 cm

243. vähintään 27 km:n korkeuteen
(Kun noustaan kohdassa, joka on pituussuunnassa keskellä Suomea.)

244. 15 min
(Avaruusasema näkyy horisontin yläpuolella, kun se on kaarella, jonka katsojan kautta kulkeva maapallon poikkileikkausympyrän tangentti erottaa aseman lentoradasta.)

245. yli 14,3 metrin etäisyydeltä

246. a) $3\frac{1}{3}$

(Yhtälö $\frac{12-r}{r} = \frac{13}{5}$ tai $\frac{12-r}{13} = \frac{r}{5}$.)

b) $5\frac{1}{4} = 5{,}25$

247. Kaatopaikka rakennetaan kärjestä A alkavalle korkeusjanalle 26 km:n etäisyydelle taajamasta A. (Etäisyys jokaisesta tiestä on 8,6 km. Paikka, joka on yhtä etäällä kaikista teistä, on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.)

248. 6,20 cm (Yhtälö $\sin 22{,}5° = \frac{r}{10+r}$.)

249. 48

250. 550 cm

251. Olkoon isomman ympyrän säde R, pienemmän ympyrän säde r ja jänteen puolikas a. Isomman ympyrän keskipisteen etäisyys jänteen keskipisteestä on r. Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan $R^2 - r^2 = a^2$, joten $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi a^2$.

252. 7 160 m
(Jatketaan suoria osuuksia, kunnes ne leikkaavat pisteessä C. Pisteestä C ympyrälle (säde 1 200 m) piirrettyjen tangenttien välinen kulma on 100°. Kuviosta ratkaistaan kaarteen ja suorien osuuden jatkeiden pituudet. Janat AC ja BC saadaan sinilauseella.)

Kehäkulma

253. a) 26° b) 146°

254. a) 34° b) 222°

255. a) 90° b) 58°

256. a) Piirretään suorakulma ympyrän kehälle. Yhdistämällä kylkien ja ympyrän leikkauspisteet saadaan ympyrän halkaisija.
b) Piirretään kaksi halkaisijaa.

257. a) 65° (Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.)
b) 53°

258. $\alpha = 140°$, $\beta = 70°$

259. a) Vastakkaisten kulmien summa on puolet vastaavien keskuskulmien summasta 360°.
b) Ei voida, sillä jos nelikulmion vastakkaisten kulmien summa ei ole oikokulma, nelikulmion ympäri ei voida piirtää ympyrää.

260. a) $AB = 11{,}2$ cm, $AC = 16{,}3$ cm ja $BC = 12{,}9$ cm
(Sivu AB on 86° keskuskulman jänne, joten tasakylkisestä kolmiosta saadaan $\frac{AB}{2} = 8{,}2 \sin 43°$ jne.)

b) 72 cm^2 (Pinta-alan saa yksinkertaisimmin kolmion pinta-alan trigonometrisella kaavalla.)

261. 1,76 cm
(Tasakylkisestä kolmiosta, jonka huippu on keskipisteessä, saadaan $r = \frac{120}{\sin 43°}$.)

262. Sellaisen ympyrän kentänpuoleisella osalla, joka kulkee pilkun ja maalitolppien kautta. Ympyrän keskipiste on maalin keskikohdan kohdalla 4,89 metrin etäisyydellä maalista. Ympyrän säde on 6,11 m.

263. Olkoon tangenttikulma γ ja samaa kaarta vastaava keskuskulma β.
Oletetaan ensin, että γ on terävä. Tällöin keskuskulman β kyljet ja jänne muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka kantakulma on $90° - \gamma$, joten $\beta = 180° - 2(90° - \gamma) = 2\gamma$.
Oletetaan, että γ on suorakulma. Tällöin vastaava kehäkulma β on oikokulma, joten $\beta = 2\gamma$.
Oletetaan, että on γ tylppä. Tällöin kulma $360° - \beta$ on tangenttikulmaa $180° - \gamma$ vastaava keskuskulma. Koska väite pätee terävälle tangenttikulmalle, niin $360° - \beta = 2(180° - \gamma)$, joten $\beta = 2\gamma$.

264. a) Kuvioon täydennetään kehäkulman kärjen kautta kulkeva ympyrän halkaisija, jolloin kehäkulma γ jakautuu kahteen osaan γ_1 ja γ_2 ja keskuskulma β vastaavasti kahteen osaan β_1 ja β_2. Todistetun erikoistapauksen nojalla

$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{2}$ ja $\gamma_2 = \frac{\beta_2}{2}$, joten

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

b) Kuvioon täydennetään kehäkulman kärjen kautta kulkeva ympyrän halkaisija, jolloin kehäkulma γ kahden kehäkulman erotus $\gamma_1 - \gamma_2$ ja keskuskulma β vastaavasti kahden keskuskulman erotus $\beta_1 - \beta_2$. Käytetään taas hyväksi todistettua erikoistapausta.

265. a) 186° b) 135°

266. $\alpha = 110°$, $\beta = 55°$

267. a) 28° b) 38°

268. Keskipiste on hypotenuusan keskipiste. Säde on puolet hypotenuusasta, siis 13.

269. 12,0 cm

270. 43 m:n päässä rakennuksen keskikohdasta, tai tämän kohdan ja julkisivun nurkkien kautta kulkevalla ympyrän kaarella. Ympyrän keskipiste on rakennuksen keskikohdan kohdalla 19 m:n päässä rakennuksesta, ja ympyrän säde on 24 m.

271. Kolmion ACP kulma C ja kolmion DBP kulma B ovat samaa kaarta AD vastaavia kehäkulmia, joten ne ovat yhtä suuret. Kolmion ACP kulma A ja kolmion DPB kulma D ovat samaa kaarta BC vastaavia kehäkulmia, joten ne ovat yhtä suuret. Siis kolmiot ACP ja DPB ovat yhdenmuotoiset (kk).

272. 11
(Tutkitaan kahta ristikkäistä kolmiota, jotka muodostuvat, kun yhdistetään jänteen ja halkaisijan päätepisteet. Kolmioissa on kaksi paria samaa kaarta vastaavia kehäkulmia, joten ne ovat yhdenmuotoiset (kk).)

273. Aukon säteen pitää olla suurempi kuin 3,6 cm. (Ratkaistaan ensin kosinilauseella yksi kolmion kulma.)

274. 10,5 cm

275. Kulmat ABC ja ABD ovat molemmat puoliympyrän sisältämiä kehäkulmia, joten ne ovat suorakulmia. Jos pisteet C ja D ovat pisteen B eri puolilla, niin kulma CBD on oikokulma, mistä seuraa väite. Jos pisteet C ja D ovat pisteet B samalla puolella, niin ne ovat molemmat pisteen B kautta piirretyllä janan AB normaalilla, mistä myös seuraa väite.

276. Merkitään piirrettyjen säteiden ja keskipisteiden kautta kulkevan suoran välistä (jompaakumpaa) kulmaa α. Kysytty kulma saadaan,

kun oikokulmasta vähennetään kehäkulma $\frac{\alpha}{2}$

ja tasakylkisen kolmion kantakulma $90° - \frac{\alpha}{2}$.

Suorakulmainen särmiö

277. a) $2{,}4\ \text{dm}^3$ b) $10{,}7\ \text{dm}^2$

278. $37{,}8\ \text{cm} \times 25{,}2\ \text{cm} \times 12{,}6\ \text{cm}$
(Yhtälö $3x \cdot 2x \cdot x = 12$, missä x:n yksikkö on desimetri. Vetomitta litra on yhtä suuri kuin tilavuuden yksikkö kuutiodesimetri. Vetomitat ja tilavuuden yksiköt ovat kirjan lopussa sivulla 227.)

279. a) $13{,}1\ \text{cm}$ b) $15{,}9\ \text{cm}$

280. a) $a\sqrt{2}$ b) $a\sqrt{3}$

281. a) Methuselah
b) $73\ \text{cm}$ (Jos Balthazarpullon korkeus on h, niin $\left(\frac{h}{29}\right)^3 = \frac{12}{0{,}75}$.)

282. $46\ \text{cm}$ (Yhtälö $\left(\frac{x}{32}\right)^3 = \frac{36}{12}$.)

283. a) Massa on 1 728-kertainen ja luuston kantokyky 144-kertainen.
b) Kaksi kertaa oman painonsa. (Pieni nisäkäs kantaa massan $10m$, missä m on sen oma massa. Isompi nisäkäs kantaa massan $5^2 \cdot 10\ m$ ja sen oma massa on $5^3 m$.)
c) $211{,}0\ \text{kg}$ ($\left(\sqrt[3]{\frac{77}{62}}\right)^2 \cdot 182{,}5\ \text{kg}$ eli $\left(\frac{77}{62}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 182{,}5\ \text{kg}$. Maailmanennätys painoluokassa $77\ \text{kg}$ on $210{,}0\ \text{kg}$.)

284. a) $68\ \text{l}$ b) $2{,}6\ \text{kg}$

285. $3{,}7\ \text{cm} \times 3{,}7\ \text{cm} \times 14{,}7\ \text{cm}$
($1\ \text{dl} = 0{,}1\ \text{l} = 0{,}1\ \text{dm}^3$)

286. $14\ \text{cm}$

287. $27\ \text{m}$

288. Pohjan mitat ovat $41\ \text{cm} \times 41\ \text{cm}$. Mahtuu, sillä laukun avaruuslävistäjän pituus on $67\ \text{cm}$.

289. a) $\sqrt[3]{2}$ -kertaisiksi eli noin 1,26-kertaisiksi
b) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ -kertaisiksi eli noin 0,794-kertaisiksi

290. $25\ \text{cm}$

291. $9{,}1\ \%$
(Jos pienemmän pakkauksen tilavuus on a, niin suuremman pakkauksen tilavuus on $\left(\frac{18}{12}\right)^3 a$.)

292. Reiän halkaisijan tulee olla vähintään
a) $64\ \text{cm}$ b) $78\ \text{cm}$.

293. Lyhimmän reitin pituus on $10{,}0\ \text{m}$. Lyhin reitti kulkee suoraan viereisen sivuseinän ja lattian halki niiden välisen särmän sellaiseen kohdan kautta, jonka etäisyys lähtönurkan alla olevasta lattianurkasta on $2{,}25\ \text{m}$. Toinen yhtä pitkä reitti kulkee symmetrisesti katon ja vastakkaisen sivuseinän halki niiden välisen särmän sellaisen kohdan kautta, jonka etäisyys vastakkaisesta kattonurkasta on $3{,}75\ \text{m}$.
(Lyhin reitti on tasoon levittynä suora. Mahdollisia reittejä on kuusi: viereisen sivuseinän ja lattian halki tai symmetrisesti katon ja vastakkaisen sivuseinän halki (pituus $\sqrt{6^2 + 8^2}$), päätyseinän ja lattian halki tai symmetrisesti katon ja vastakkaisen päätyseinän halki (pituus $\sqrt{9^2 + 5^2}$) ja päätyseinän ja vastakkaisen sivuseinän halki tai symmetrisesti viereisen sivuseinän ja vastakkaisen päätyseinän halki ($\sqrt{11^2 + 3^2}$). Reitin tarkempi kuvaus laaditaan yhdenmuotoisten kolmioiden avulla.)

294. Suoraan katon ja vastakkaisen päätyseinän poikki niiden välisen särmän sellaisen kohdan kautta, joka on $2{,}00$ metrin päässä vastakkaisen seinän lähemmästä kattonurkasta. Lyhimmän reitin pituus on $7{,}91\ \text{m}$.

295. 100 cm
(Pakettia kieritetään tasossa tahkolta toiselle niin, että nauha piirtää tasoon suoran viivan. Aluksi oikeanpuoleiselle päätytahkolle, sitten yläpohjalle, sitten takana olevalle sivutahkolle jne. Nauhan pituus on $\sqrt{80^2 + 60^2}$.)

296. a) 16 b) 32
c) 24 d) 8
(Jokainen kärki piirtää särmän, särmä tahkon jne., joten esimerkiksi särmien lukumäärä on kaksi kertaa kuution särmien lukumäärä lisättynä kuution kärkien lukumäärällä.)
e) Hyperkuution lävistäjän pituus on kaksi kertaa särmän pituus. (Hyperkuution lävistäjä on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat kuution avaruuslävistäjä ja hyperkuution särmä.)

Kulma avaruudessa

297. 34 °
(Huippukulma tasakylkisessä kolmiossa, jonka kyljet ovat 25,8 cm ja kanta 15 cm.)

298. 30° $\left(\tan\alpha = \frac{15}{25{,}8}\right)$

299. a) 21,8° $\left(\tan\alpha = \frac{2}{5}\right)$

b) 33,9° $\left(\tan\beta = \frac{3}{\sqrt{20}}\right)$

c) 48,0° $\left(\tan\gamma = \frac{4}{\sqrt{13}}\right)$

300. a) 33,7° $\left(\tan\alpha = \frac{2}{3}\right)$

b) 67,4°

301. 75,6° (kosinilauseella)

302. a) 54,7° (Jos kuution särmä on a, niin $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$)

b) 35,3° $\left(\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

c) 70,5° $\left(\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right.$ tai $\left.\cos\gamma = \frac{1}{3}\right)$

303. a) 44° b) 29°, kulma pienenee

304. 1 400 m

305. a) 21° b) 31°

306. 119°

307. a) 13,3° b) 43,5° c) 87,0°
(Särmiön korkeutta kannattaa merkitä esimerkiksi a, jolloin pohjasärmät ovat $3a$.)

308. 74°

309. 109°

310. a) 54,7° b) 35,3°

311. 11,2 km
(Olkoot B ja C maanpinnan kohdat, joiden yläpuolella koneet ovat. Tällöin suuntien AB ja AC välinen kulma on 90°.)

312. 69,8°
(Kulma ei riipu siitä, kuinka etäällä koneet ovat. Voidaan siis olettaa, että maanpinnan kohdat, joiden yläpuolella koneet ovat, ovat yhtä etäällä pisteestä P.)

313. a) 19,5° (Kosinilauseella kolmiosta, jonka sivut ovat kolmion ABC kateetti ja kärjestä A piirretty korkeusjana sekä tasasivuisen kolmion QPS korkeusjana.)
b) 90° (Tulos on tarkka arvo. Kulma on kärjistä P ja Q särmälle AS piirrettyjen normaalien välinen kulma.)

Pallo

314. 9 400 km

315. 13 700 km

316. 450 m^2

317. 47 %

318. 9,7 cm

319. 198 l (Öljy muodostaa pallosegmentin.)

320. 4,11 % (Arktinen alue muodostaa maapallon kalotin, jonka korkeus on $R - R\cos 23{,}4°$, missä R on maapallon säde.)

321. a) $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$ (Jos pallon säde on r, niin suorakulmaisen särmiön särmät ovat $2r$, $2r$ ja r.)
b) 48 %

322. enintään 7,8 cm (Särmiön avaruuslävistäjä saa olla enintään 14,0 cm.)

323. a) sisään asetettu pallo $\frac{a}{2}$, ympäri asetettu pallo $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$

c) $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$ (Säteiden suhteen neliö.)

d) $\frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}19$ (Säteiden suhteen kuutio.)

324. 41 250 km
(Auringonsäteet saapuvat Aleksandriaan maapallon keskipisteen ja Syenen kautta kulkevan suoran suuntaisina, ja ne muodostavat 7°12′:n kulman maapallon keskipisteen ja Alexandrian kautta kulkevan suoran kanssa. Kuviosta havaitaan, että Syenen ja Aleksandrian yhdistävän maapallon isoympyrän kaaren keskuskulma on 7°12′.)

325. a) 111 km

b)

paikkakunta	kuljettu matka (km)
Helsinki	0
Kairo	3 300
Lusaka	8 300
Etelänapa	16 700
Cookin saaret	24 400
Honolulu	28 900
Pohjoisnapa	36 700
Helsinki	40 000

c) 11 100 km (40 000 km – 28 900 km)

326. Peking–Madrid 10 000 km,
Madrid–New York 5 900 km,
Peking–New York 14 300 km

327. 57° pohjoista leveyttä

328. a) 8,2 l b) 14 l

329. 94,0 cm^3

330. 570 g (Segmentin tilavuus on 583,8 cm^3.)

331. 850 cm^3
(Lasketaan pallosegmentin tilavuus. Pallon säde ratkaistaan yhtälöllä $r^2 = (r-5)^2 + 10^2$.)

332. 43 % (Näkyvyysalue on maapallon kalotti. Kalotin pohjan etäisyys pallon keskipisteestä lasketaan trigonometrian avulla tai se voidaan laskea yhdenmuotoisista kolmioista.)

333. a) $r\sqrt{\frac{2}{3}}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}26$
(Pallon säde on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat kuution korkeus a ja kuution pohjan lävistäjän puolikas $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.)

334. a) kolmasosan
(Katsoja näkee pallon kalotin. Jos pallon säde on r, niin yhdenmuotoisista kolmioista nähdään, että kalotin pohjan etäisyys pallon keskipisteestä on $\frac{1}{3}r$.)

b) säteen etäisyydellä

335. $\frac{3}{4}a$ (Tutkitaan poikkileikkausta, joka muodostuu, kun kappaleet leikataan kuution kahden vastakkaisen särmän kautta kulkevalla tasolla. Pythagoraan lauseella saadaan yhtälö $r^2 = (a - r)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$.)

336. 23° pohjoista leveyttä ja 62° läntistä pituutta (eli laiva oli Sargassomerellä.)
(Koska Pohjantähti on Pohjoisnavan yläpuolella, valonsäteet Pohjantähdestä saapuvat laivaan Maapallon keskipisteen ja Pohjoisnavan kautta kulkevan suoran suuntaisina.)

337. 130 km länteen Ivalosta

338. 9 000 km (Lasketaan Pekingiä ja Madridia yhdistävän jänteen pituus ja edelleen maapallon keskipisteestä kaupunkeihin piirrettyjen maapallon säteiden välinen kulma.)

Lieriö

339. a) On. Pohja on kolmio.
b) Ei ole.
c) On. Pohja on kahdeksankulmio.
d) Ei ole.

340. 19,8 cm

341. 92 m^2

342. 490 l (Sademäärä ilmaistaan tavallisesti millimetreinä, jolloin tarkoitetaan sataneesta vedestä vaakasuoralle tasaiselle pinnalle muodostuvan vesikerroksen paksuutta.)

343. 51 m^3 (Oja on lieriö, jonka pohja on puolisuunnikas ja korkeus 60 m.)

344. 5,7 cm pohjasta
(1 cl = 0,01 l = 0,01 dm^3 = 10 cm^3)

345. 5,5 dm^2
(Pohjan pinta-alan tulee olla 1,00 dm^2.)

346. 21 m (Oikaistu kuparilanka on ympyrälieriö. Lasketaan langan tilavuus ja ratkaistaan lieriön korkeus.)

347. 1 900 l (Öljykerros on lieriö, jonka pohja on ympyrän segmentti ja korkeus 3,5 m.)

348. alle 10,4 cm korkea

349. $\frac{\pi}{4} \approx 78{,}5\ \%$ (Koska korkeudet ovat samat, niin tilavuuksien suhde on yhtä suuri kuin pohjien pinta-alojen suhde. Merkitään särmiön pohjasärmää a, jolloin lieriön pohjan säde on $\frac{a}{2}$.)

350. 4,2 m^3

351. 0,64 mm

352. 7,2 cm

353. 360 cm^3

354. 96 l

355. Pohjan halkaisija ja korkeus ovat 6,8 m.

356. 170 cm^3 (Ratkaistaan kosinilauseella yksi pohjakolmion kulma.)

357. 46 %

358. 2304π
(Pallosta poistetaan ympyrälieriö, jonka korkeus on 24, ja kaksi segmenttiä, joiden korkeus on 3.)

359. tilavuus 14,3 m^3 ja kokonaispinta-ala 33,0 m^2 (Segmentit ovat pallosta, jonka säde on 1,25 m.)

Kartio

360. 3,6 m^3

361. 360 cm^2 (Vaippa muodostuu kuudesta samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta.)

362. a) 36 cm^3

b) 69° ($\tan\alpha = \frac{h}{2{,}2}$, missä h on pyramidin korkeus.)

363. tilavuus 160 cm^3, vaipan pinta-ala 130 cm^2

364. a) 10,0 cm b) 1 170 cm^3

365. a) 2 cl (Tilavuuksien suhde on korkeuksien suhteen $\frac{1}{2}$ kuutio.

b) 91 % ($\left(\frac{x}{h}\right)^3 = \frac{12}{16}$, missä h on koko lasin ja x nestekerroksen korkeus.)

366. a) 83 m (Katkaistu pyramidi täydennetään kokonaiseksi ja käytetään hyväksi yhdenmuotoisia kolmioita.)
b) 430 000 m^3

367. $4\frac{4}{5} = 4{,}8$
(Jos r on pallon säde, niin yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö $\frac{r}{8} = \frac{15-r}{17}$, missä 15 on kartion korkeus.)

368. $3\frac{1}{3}$ (Yhdenmuotoisista kolmiosta saadaan $\frac{r}{10} = \frac{8}{24}$.)

369. 11,3 cm (Kun pallojen keskipisteet yhdistetään, muodostuu säännöllinen nelisivuinen pyramidi, jonka kaikkien särmien pituus on 6,6 cm. Keon korkeus on pyramidin korkeus lisättynä kahdella pallon säteellä.)

370. 114 cm^3

371. 270 m^2

372. 9,6 m^2

373. a) 71,6° (Jos pohjasärmää merkitään $2a$ ja korkeutta $3a$, niin $\tan\alpha = \frac{3a}{a} = 3$.)

b) 64,8° ($\tan\beta = \frac{3}{\sqrt{2}}$)

c) 72,5° ($\tan\gamma = \sqrt{10}$)

374. tilavuus 130 cm^3, pinta-ala 150 cm^2

375. 6,3 cm ja 8,0 cm pikarin pohjasta sivua pitkin mitattuna.

376. a) 470 cm^2 b) 1 500 cm^3

377. 8,0 m (yhdenmuotoisista kolmioista)

378. $9\frac{1}{6}$ (Suurin pallo sivuaa jokaista vaippakolmiota kolmion korkeusjanan pisteessä.)

379. $\frac{9}{32} \approx 0{,}28$ (Jos pallon säde on r, niin kartion korkeus on $\frac{3}{2}r$ ja pohjaympyrän säteen neliö $\frac{3}{4}r^2$.)

380. 1,5 dl (Pallon säde 3,25 cm löydetään muodostamalla yhtälö Pythagoraan lauseella.)

381. a) $d \geqslant 18\frac{2}{15}$ (Rajatapauksessa pallo on suuaukon varassa ja kartion vaippa sivuaa palloa. Pallon säde saadaan yhdenmuotoisista kolmioista.)

b) $\frac{13}{125} = 0{,}104$ (Pallon keskipisteen etäisyys suuaukosta ratkaistaan Pythagoraan lauseella. Pallon sisään jää segmentti, jonka korkeus on 4.)

c) $\frac{81}{256} \approx 0{,}316$ (Pallon keskipisteen etäisyys kartion huipusta ratkaistaan yhdenmuotoista kolmiosta. Pallon sisään jää segmentti, jonka korkeus on 6.)

382. a) 83,6° b) 180°

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 360° \approx 254{,}6°$

383. $\frac{4\sqrt{2}a}{5+\sqrt{2}} \approx 0{,}88a$

(Olkoon neljännesympyrän säde r, missä $r < a$, ja olkoon R jäljelle jäävästä pellistä saatavan suurimman mahdollisen ympyrän säde. Tällöin $r + R + \sqrt{2}\,R = \sqrt{2}\,a$ eli $R = \frac{\sqrt{2}a - r}{1+\sqrt{2}}$. Kartion pohjaympyrän säde on $\frac{r}{4}$. Ratkaistaan epäyhtälö $\frac{\sqrt{2}a - r}{1+\sqrt{2}} \geqslant \frac{r}{4}$.)

384. a) tetraedri 70,5° ja oktaedri 109,5° (Kahden tahkon yhteiselle särmälle piirrettyjen korkeusjanojen välinen kulma)

b) tetraedrin pinta-ala $a^2\sqrt{3}$ ja tilavuus $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, oktaedrin pinta-ala $2a^2\sqrt{3}$ ja tilavuus $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

(Symmetrian takia tetraedrin kärjestä vastakkaiselle tahkolle piirretty korkeusjana kohtaa vastakkaisen tahkokolmion kolmion korkeusjanojen leikkauspisteessä).

Kertaustehtäviä

385. 63° (Kulma, jossa säde jättää peilin, on kulman α kanssa samankohtainen kulma. Siis $2\alpha + 54° = 180°$.)

386. Keskellä on ristikulmat, jotka ovat yhtä suuret. Jos niiden suuruus γ, niin $\alpha = 180° - 90° - \gamma$ ja $\beta = 180° - 90° - \gamma$. Siis $\alpha = \beta$.

387. Jos terävät kulmat ovat α ja β, niin puolittajien ja hypotenuusan muodostamasta kolmiosta voidaan laskea, että puolittajien välinen tylppä kulma on $180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$

$= 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180° - \frac{1}{2} \cdot 90° = 135°$.

Siis riippumatta kulmien α ja β suuruudesta puolittajien välinen tylppä kulma on aina 135° (ja terävä kulma 45°).

388. pituus 110 km ja pinta-ala 8 800 km^2
(Jos x on saaren pituus senttimetreinä, niin $\frac{3{,}1}{x} = \frac{1}{3\,500\,000}$. Jos A on saaren pinta-ala neliösenttimetreinä, niin $\frac{7{,}2}{A} = \left(\frac{1}{3\,500\,000}\right)^2$.)

389. 54,1 cm:n korkeudelle (Valonsäteet jättävät seinän samassa kulmassa, jossa ne kohtaavat seinän. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö $\frac{h}{2{,}85} = \frac{1{,}32 - h}{4{,}10}$.)

390. 21,5 cm (Yhtälö $\frac{x}{3} : 12{,}4 = \frac{12{,}4}{x}$, joka sievenee muotoon $x^2 = 3 \cdot 12{,}4^2$.)

391. a) $11\frac{2}{3}$ (Yhtälö $\frac{x-5}{x} = \frac{4}{7}$).

b) $\frac{16}{49} \approx 0{,}33$ (Pinta-alojen suhde on vastinosien suhteen neliö $\left(\frac{4}{7}\right)^2$.)

392. 5,1 l (Jos V on pienemmän ämpärin vetoisuus, niin $\frac{V}{12} = \left(\frac{25}{30}\right)^3$.)

393. korkeus 64 cm, pahvin tarve 2,0 m^2
(Jos h on laatikon korkeus, niin
$\left(\frac{h}{52}\right)^3 = \frac{150}{80}$.
Jos A on pahvin tarve, niin $\frac{A}{1{,}3} = \left(\frac{h}{52}\right)^2$.)

394. 485 m (Olkoon x linjan etäisyys vastakkaisesta kärjestä. Linja erottaa palstasta koko palstan kanssa yhdenmuotoisen kolmion, jonka pinta-ala on 48 ha. Pinta-alojen suhde on vastinkorkeuksien suhteen neliö, joten
$\left(\frac{x}{1350}\right)^2 = \frac{48}{117}$.)

395. 2,0 m ($18 \cdot \tan 6{,}2°$)

396. 470 m ($\frac{270}{\sin 35°}$)

397. 26,6°, 36,9° ja 26,6°
(Lasketaan ensin keskimmäinen kulma. Jos kolmion hypotenuusa on a, niin hypotenuusalle piirretty korkeus on $\frac{a}{2}$. Keskimmäisen kulman puolikkaan tangentti on $\frac{a}{6} : \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$. Kaksi muuta kulmaa ovat keskenään yhtä suuria.)

398. 9,0 m ($6{,}0 \cdot \tan 42° + 3{,}6$)

399. 22 km (Merkitään aamupäivän matkaa $3x$, jolloin iltapäivän matka on $4x$ ja
$(3x)^2 + (4x)^2 = 16^2$.)

400. $14\frac{14}{29}$
(Hypotenuusan pituus on 29. Yhdenmuotoista kolmioista saadaan verrantoyhtälö $\frac{h}{20} = \frac{21}{29}$.)

401. a) 121,3° b) 37,6° ja 142,4°
c) 68,3°

402. a) 155,8° b) 52,2° c) 43,9°

403. a) 233 cm^2 ($A = \frac{1}{2} \cdot 18{,}4 \cdot 26{,}5 \cdot \sin 107{,}2°$)
b) 21,7° tai 158,3°
(Yhtälö $\frac{1}{2} \cdot 18{,}4 \cdot 26{,}5 \cdot \sin \alpha = 90{,}0$.)

404. 59 cm^2 ($6{,}2 \cdot 18{,}1 \cdot \sin 148°$)

405. 13 cm^2 (Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Suunnikas muodostuu neljästä (pinta-alaltaan yhtä suuresta) kolmiosta.)

406. huippukulman sini $\frac{1}{4}$ ja kulma noin 14,48°
tai 165,52° ($\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 18$)

407. 7,9 m ($\frac{x}{\sin 72°} = \frac{8{,}2}{\sin 79°}$)

408. kaksi ratkaisua: 6,4 cm:n sivun vastainen kulma 52°, kolmas kulma 92° ja kolmas sivu 8,2 cm, tai vastaavasti 128°, 16° ja 2,2 cm
(Ensin ratkaistaan 6,4 cm:n sivun vastainen kulma yhtälöstä $\frac{6{,}4}{\sin \alpha} = \frac{4{,}8}{\sin 36°}$, sen jälkeen kolmas kulma ja edelleen sinilauseella tai kosinilauseella kolmas sivu.)

409. 15 m (Pystyyn jääneen tyngän pituus:
$\frac{x}{\sin 28°} = \frac{8{,}0}{\sin 50°}$. Taittuneen osan pituus:
$\frac{y}{\sin 102°} = \frac{8{,}0}{\sin 50°}$.)

410. 8,1 m:n päässä (Ratkaistaan ensin 6,0 metrin sivun vastainen kulma α (pylvään ja maanpinnan välinen kulma) sinilauseella:
$\frac{6{,}0}{\sin \alpha} = \frac{9{,}0}{\sin 78°}$. Kysytty etäisyys saadaan edelleen sini- tai kosinilauseella.)

411. 1,9 m (Ratkaistaan ensin sinilauseella jommankumman katonlappeen leveys, minkä jälkeen kattorakennelman korkeus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.)

412. 15,2 cm
($x^2 = 5{,}2^2 + 12{,}1^2 - 2 \cdot 5{,}2 \cdot 12{,}1 \cdot \cos 118°$)

413. 18 m (Jos x on taittuneen osan pituus, niin $x^2 = 9{,}0^2 + 6{,}0^2 - 2 \cdot 6{,}0 \cdot 9{,}0 \cdot \cos 102°$.)

414. 105° (Kolmion suurin kulma on 9,1 cm:n sivun vastainen kulma, sillä kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Yhtälöstä $9{,}1^2 = 4{,}5^2 + 6{,}8^2 - 2 \cdot 4{,}5 \cdot 6{,}8 \cdot \cos\alpha$ ratkaistaan ensin $\cos\alpha$.)

415. huippukulman kosini $\frac{41}{50}$, kulma noin 34,92°
($3^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$)

416. 10 (Jänteen etäisyys keskipisteestä on $\sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Pienemmän ympyrän säde on $\sqrt{8^2 + 6^2}$.)

417. $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$ (Jos ympyrän säde on r, niin kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$.)

418. 10 (Suorakulmaisesta kolmiosta, jonka muodostavat kannan päätepisteeseen piirretty säde, keskipisteen etäisyys kannasta ja kannan puolikas, saadaan $r^2 = (18 - r)^2 + 6^2$.)

419. 69 mm (Nimilapun leveys on poikkileikkausympyrän kaaren pituus. Nimilappu näyttää neliöltä, kun kaaren päätepisteitä yhdistävän jänteen pituus on sama kuin nimilapun korkeus. Kaaren keskuskulma α saadaan yhtälöstä $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{30}{r}$, missä r on tölkin poikkileikkausympyrän säde millimetreinä.)

420. 9,6 cm^2 (Ratkaistaan ensin segmentin keskuskulma α yhtälöstä $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4{,}3}{6{,}5}$. Segmentin pinta-ala on sektorin pinta-alan $A_S = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot 6{,}5^2$ ja tasakylkisen kolmion pinta-alan $A_K = \frac{1}{2} \cdot 6{,}5 \cdot 6{,}5 \cdot \sin\alpha$ erotus.)

421. a) $\frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})r$ (Neliön sivu on $\sqrt{2}\,r$.)

b) $\frac{1}{2}(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0{,}086$

$((2 - \sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2$
$= 6 - 4\sqrt{2} = 2(3 - 2\sqrt{2}))$

422. 35° ($\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{R + 15\,000}$, missä R on maapallon säde.)

423. vähintään 290 km:n korkeudelle
(Pienin korkeus on $\frac{R}{\cos\alpha} - R$, missä R on maapallon säde ja α on 1 900 km:n kaaren keskuskulma maapallon isoympyrässä.)

424. $4\frac{4}{5} = 4{,}8$ (Kolmion kylki on 17. Kolmio, jonka kärjet ovat ympyrän keskipiste, sivuamispiste kyljellä ja kolmion huippu, on yhdenmuotoinen tasakylkisen kolmion puolikkaan kanssa. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö $\frac{r}{8} = \frac{15 - r}{17}$.)

425. Ympyrä, jonka säde on 14,3 cm.
(Ratkaistaan ensin sen ympyrän säde, jonka kehällä pikkuympyrät ovat. Yhdelle 5,0 cm:n ympyrälle keskipisteestä piirrettyjen tangenttien välinen kulma on $\frac{360°}{12} = 30°$, joten ympyrän säde on $\frac{5}{\sin 15°}$ (cm). Sisään mahtuu ympyrä, jonka säde on $\frac{5}{\sin 15°} - 5$ (cm).)

426. $15°$ (Kehäkulma A on $\frac{112°}{2} = 56°$. Sen jälkeen voidaan jatkaa esimerkiksi näin:
Koska nelikulmion kulmien summa on $360°$, niin $\alpha = 360° - (248° + 41° + 56°)$.
Tai esimerkiksi näin: Säde CA jakaa kulman A kahteen osaan, joista toisen suuruus on $41°$ ja toisen α (tasakylkisen kolmion kantakulmat.) Siis $\alpha = 56° - 41°$.)

427. Esimerkiksi näin: Koska samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret, niin $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$ ja $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD$. Siis $\sphericalangle BDC + \sphericalangle CBD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = \sphericalangle A$.

428. 6,3 cm (Ympyrän jännettä AB vastaavan keskuskulman suuruus on $2 \cdot (180° - 106° - 51°)$. Sivun AB pituus ratkaistaan tasakylkisestä kolmiosta.)

429. Säde on 8,5. Keskipiste on hypotenuusan keskipisteessä.
(Säde on puolet hypotenuusasta.)

430. $54\ \text{m}^3$ (Puolipallo, jonka säde on 2,95 m.)

431. $4{,}25\ \text{dm}^2$ (Kuutiodesimetri lasia painaa 2,38 kg, joten pallon tilavuus $\frac{1{,}96}{2{,}38}\ \text{dm}^3$.)

432. a) 13 700 km (35. eteläisen leveyspiirin kaari, jonka asteluku on $360° - (151° + 58°)$. Leveyspiirin säde on $R \cos 35°$ (eli $R \sin 55°$), missä R on maapallon säde.)
b) 12 200 km (Alkumatka ja loppumatka ovat molemmat maapallon isoympyrän $55°$:n kaaria.)

433. $\frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}19$ (Jos isomman kuution särmä on a, niin pallon halkaisija on a. Pallon halkaisija on pienemmän kuution avaruuslävistäjä, joten pienemmän kuution särmä on $\frac{a}{\sqrt{3}}$.)

434. 4,00 l (Puolipallosta vähennetään pallosegmentti. Segmentin korkeus on $12{,}5 - \sqrt{12{,}5^2 - 6{,}0^2}$ (cm).)

435. $120\ \text{m}^2$ (Alue on pallon kalotti. Langan pituus on huipun kautta kulkevan poikkileikkausympyrän kaaren pituus. Kaaren keskuskulma on $\alpha = \frac{6{,}4}{\pi \cdot 18} \cdot 360°$ ja kalotin korkeus $9{,}0 - 9{,}0 \cdot \cos\alpha$ (m).)

436. 14 cm (Lieriön pohjan pinta-ala desimetreinä on $A = \frac{V}{h}$, missä $V = 2{,}0\ \text{dm}^3$ ja $h = 1{,}3$ dm.)

437. enintään 4,4 cm:n korkeudella
(Kattilassa tulee olla tyhjää tilaa vähintään tuttipullon vaatiman tilavuuden $\pi \cdot 3^2 \cdot 10\ \text{cm}^3$ verran. Tyhjän tilan korkeuden tulee olla vähintään $\frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 10}{\pi \cdot 4^2}$ cm.)

438. 72 l (Mäski muodostaa lieriön, jonka korkeus on 90 cm ja jonka pohja on 18 cm korkea segmentti ympyrässä, jonka säde on 36 cm.)

439. a) $\frac{5}{9} \approx 0{,}556 = 55{,}6\ \%$
(Jos pallon säde on r, niin lieriön pohjan säteen neliö on $R^2 = r^2 - \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = \frac{5}{9}r^2$ ja lieriön tilavuus $V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{5}{9}r^2 \cdot \frac{4}{3}r = \frac{20}{27}\pi r^3$.)

b) $\frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}530 = 53{,}0\ \%$
(Merkitään pallon sädettä r. Pallon säde on hypotenuusa tasakylkisessä suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat lieriön pohjan säde ja lieriön korkeuden puolikas. Lieriön pohjan säde $\frac{r}{\sqrt{2}}$ $\left(= \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$ saadaan muistikolmiosta tai Pythagoraan lauseella. Lieriön korkeus on $\frac{2r}{\sqrt{2}}$ $\left(= \sqrt{2}\,r\right)$, joten lieriön tilavuus on $V = \pi\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{2r}{\sqrt{2}} = \frac{\pi r^3}{\sqrt{2}}$ $\left(= \frac{\pi\sqrt{2}r^3}{2}\right)$.)

440. $60\ \text{cm}^2$ (Vaippakolmioiden korkeus on $\sqrt{4^2 + 3^2}$ cm.)

441. 1 600 m^3 (Pohjaneliön sivun pituus on $2 \cdot \frac{6{,}4}{\tan 25°}$.)

442. 4,5 dm^3 (Kartion pohjaympyrän kehän pituus on $b = \frac{210°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 25$ (cm) ja säde $r = \frac{b}{2\pi}$. Kartion korkeus saadaan Pythagoraan lauseella.)

443. 390 m^3 (Kartion sivujanan pituus saadaan yhtälöllä $\pi \cdot 4{,}3 \cdot s = 280$ ja korkeus edelleen Pythagoraan lauseella.)

444. 2,7 l (Katkaistu kartio täydennetään kokonaiseksi. Kokonaisen kartion korkeus ratkaistaan yhdenmuotoisista kolmioista saatavalla yhtälöllä $\frac{h}{h-6} = \frac{28}{20}$. Katkaistun kartion tilavuus on kahden kartion tilavuuksien erotus.)

445. $\frac{1}{16}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \approx 0{,}117$ (Jos pallon säde on r, niin kartion pohjan etäisyys pallon keskipisteestä on $\frac{\sqrt{3}}{2} r$ ja kartion korkeus $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})r$. Kartion tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})r = \frac{1}{12}(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})\pi r^3$.)

446. 49° (Taitoksen jälkeisessä kolmiossa sivut AB ja AC ovat 18 cm ja sivu BC on $10{,}5\sqrt{2}$ cm $\approx$ 14,85 cm.)

447. a) 30,8° ($\tan \alpha = \frac{4}{\sqrt{45}}$)

b) 39,8° ($\tan \beta = \frac{5}{6}$)

c) 74,4° (Kolmiosta, jonka sivut ovat tahkojen lävistäjät 5, $\sqrt{45}$ ja $\sqrt{52}$, ratkaistaan kosinilauseella kahden ensimmäisen sivun välinen kulma.)

448. a) 76,0° ($\tan \alpha = 4$)

b) 28,1° ($\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{4}$ tai $\beta = 180° - 2\alpha$, missä α on a-kohdan kulma.)

c) 70,5° ($\tan \gamma = 2a : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{\sqrt{2}}$, kun pohjasärmä on a ja korkeus $2a$.)

d) 76,4° ($\tan \delta = \frac{a\sqrt{17}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{17}$ tai kosinilauseella: $\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{18}}$)

Sarja A

1. a) 2,2 m b) 1,4 m
(Piirrä kuvio tilanteesta, jossa a) aikuisen b) lapsen puoli on maassa, ja käytä hyväksesi yhdenmuotoisia kolmioita.)

2. 2,3 m (Allas ja laatoitus muodostavat ympyrän, jonka pinta-ala on $\pi \cdot 7{,}5^2 + 125$ (m^2). Määritetään ympyrän säde ja vähennetään siitä altaan säde 7,5 m. Toinen tapa on ratkaista laatoituksen leveys x toisen asteen yhtälöstä $\pi(7{,}5 + x)^2 - \pi \cdot 7{,}5^2 = 125$ eli yhtälöstä $\pi x^2 + 15\pi x - 125 = 0$.)

3. 80 cm^3 (Pohjaneliön sivun pituus saadaan kosinilauseella tai suorakulmaisen kolmion trigonometrialla. Pyramidin korkeus saadaan Pythagoraan lauseella.)

4. Kolmiossa ABC merkitään $\sphericalangle B = \beta$ ja $\sphericalangle C = \gamma$. Kolmion BCR kulma B on tasakylkisen kolmion BCQ kantakulma, joten kulma on $90° - \frac{\gamma}{2}$. Kolmion BCR kulma C on tasakylkisen kolmion CPB kantakulma, joten kulma on $90° - \frac{\beta}{2}$. Siis kolmion BCR kulma R on

$$180° - (90° - \tfrac{\gamma}{2}) - (90° - \tfrac{\beta}{2}) = \frac{\gamma + \beta}{2}.$$

5. 16,0 cm (Sivukuvassa kuutioiden yläreunan alapuolelle jää 8,0 cm pitkän jänteen rajaama segmentti ympyrästä, jonka säde on 5,0 cm. Kuutioiden yläreunan yläpuolelle jää siis ympyrän osa, jonka korkeus on jänteen etäisyys keskipisteestä (3,0 cm) lisättynä säteellä.)

6. 8,3 km tai 4,4 km (Mallikuvio paljastaa, että ratkaisuja on kaksi. Kolmiosta VLM (vene, luoto, majakka) ratkaistaan ensin kulma M sinilauseella ja saadaan $\sphericalangle M \approx 60{,}08°$ tai $\sphericalangle M \approx 180° - 60{,}08° \approx 119{,}92°$. Lasketaan molempia vaihtoehtoja vastaavat kulman L suuruudet ja edelleen sinilauseella sivun VM pituudet. Tehtävän voi ratkaista myös kosinilauseella niin, että merkitään $VM = x$ ja ratkaistaan toisen asteen yhtälö $3{,}9^2 = 7{,}2^2 + x^2 - 2 \cdot 7{,}2 \cdot x \cdot \cos 28°$.)

Sarja B

1. 1800 m^2 (Alue on ympyrä, jonka säde on $\sqrt{36^2 - 27^2}$ metriä.)

2. vaipan pinta-ala 132 cm^2, tilavuus 67 cm^3

3. 12 km (Laivojen etäisyydet vuoresta ovat $\frac{850}{\tan 8{,}1°}$ ja $\frac{850}{\tan 6{,}7°}$. Laivojen etäisyys toisistaan saadaan kosinilauseella.)

4. seuraavana yönä kello 4
(Kahdessa tunnissa palanut osa on 7 cm korkea kartio. Kun kynttilän korkeus on 13 cm, palanut osa on yhdenmuotoinen 12 cm korkea kartio. Koska palamisaika on suoraan verrannollinen palaneen osan tilavuuteen, palamisaikojen suhde on sama kuin tilavuuksien suhde, joka taas on sama kuin korkeuksien suhteen kuutio. Siis $\frac{t}{2} = \left(\frac{12}{7}\right)^3$.)

5. korkeus 15,1 m ja pohjan halkaisija 17,4 m
(Olkoon säiliön pohjan halkaisija ja sivujanan pituus x metriä. Pythagoraan lauseella saadaan säiliön korkeus $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Ratkaistaan x yhtälöstä $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = 1\,200$.)

6. $\frac{3}{5}$ (Merkitään kuution särmää a. Tutkitaan poikkileikkauskuviota tasossa, joka kulkee tahkon keskipisteen ja vastakkaisen tahkon kahden vastakkaisen särmän keskipisteen kautta. Poikkileikkauskuviossa on neliö ja ympyrä, joka sivuaa yhtä neliön sivua sivun keskipisteessä ja kulkee vastakkaisen sivun päätepisteiden kautta. Vastakkainen sivu on ympyrän jänne, jonka etäisyys keskipisteestä on $a - r$, missä r on pallon säde. Pythagoraan lauseesta saadaan yhtälö $r^2 = (a - r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, josta ratkaistaan $r = \frac{5}{8}a$.
Neliön ulkopuolelle jää viisi pallon kalottia, joista neljän korkeus on $\frac{1}{8}a$ ja yhden $\frac{1}{4}a$.)

Sarja C

1. 1 100 m^2

(Pihan halkaisija on $\dfrac{8{,}0}{\tan 12°}$ metriä.)

2. vähintään 5,1 kilometrin korkeudella

($\dfrac{R}{\cos\alpha} - R$, missä R on maapallon säde ja

$\alpha = 62° 26' - 60° 9' = 2° 17' = 2\dfrac{17}{60}° \approx 2{,}2833°$.)

3. 45°

(Kehäkulma PCB vastaa samaa kaarta kuin kehäkulma PDB, joten $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PDB$.
Siis $\sphericalangle PDA + \sphericalangle PCB = \sphericalangle PDA + \sphericalangle PDB$
$= \sphericalangle ADB = 45°$.)

4. 166 m ja 101 m

(Lävistäjällä olevan polun pituus saadaan Pythagoraan lauseella. Toisen polun voi ajatella kulkevan suorakulmion kärjen kautta, jolloin muodostuu yhdenmuotoiset kolmiot.)

5. 25 km/h (Laivan kulkema matka saadaan sinilauseella kolmiosta, jonka yhden sivun pituus on $\dfrac{890}{\tan 7{,}8°}$ m ja vastaisen kulman suuruus 65° ja jossa laivan kulkeman matkan vastainen kulma on 45°.)

6. 530 cm^2 (Kalvon muodostaa kaksi neliötä (sivu $2r$, missä r on pallon säde), neljä ympyrälieriön (säde r, korkeus $2r$) vaipan puolikasta ja neljä pallon (säde r) pinnan neljännestä.)

Sarja D

1. 32,3 m^2

(Tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus saadaan Pythagoraan lauseella: $h^2 + 1{,}2^2 = 5{,}8^2$.)

2. 1 tunnissa 55 minuutissa

(Täyttöaikojen suhde on yhtä suuri kuin tilavuuksien $\pi \cdot 112{,}5^2 \cdot h$ ja $\pi \cdot 67{,}5^2 \cdot 2h$ suhde.)

3. Ohjeen mukaan piirretty sivu on 0,20 % oikeaa pituutta lyhyempi.

(Säännöllisen seitsenkulmion sivun pituus on $2r\sin\dfrac{360°}{14}$, missä r on ympyrän säde. Ohjeen mukaan piirretyn sivun pituus on $r \sin 60°$.
Ohjeen mukaan piirretyn sivun pituuden suhde oikeaan pituuteen on $\dfrac{\sin 60°}{2\sin\frac{360°}{14}} \approx 0{,}9980$.)

4. Kulman suuruus on aina 135°.

(Merkitään kolmion ABC kulmia $\sphericalangle B = \beta$ ja $\sphericalangle C = \gamma$. Tällöin $\sphericalangle EBA = 180° - \beta$. Koska kolmio EBA on tasakylkinen, niin $\sphericalangle BAE = \dfrac{\beta}{2}$.

Vastavaasti $\sphericalangle CAF = \dfrac{\gamma}{2}$. Siis

$\sphericalangle EAF = \dfrac{\beta}{2} + 90° + \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\beta + \gamma}{2} + 90°$.)

5. 5,6 m (Sisäkkäin asetetut kappaleet leikataan hirren vastakkaisten särmien kautta kulkevalla tasolla. Katkaisemattoman tukin pituus metreinä voidaan ratkaista yhdenmuotoisista kolmioista esimerkiksi verrantoyhtälöllä $\dfrac{x - 8{,}6}{x} = \dfrac{0{,}1}{0{,}42}$, josta $x \approx 11{,}29$ (m). Hirren pituus h saadaan edelleen yhdenmuotoisista kolmioista esimerkiksi yhtälöllä $\dfrac{11{,}29 - h}{11{,}29} = \dfrac{0{,}15\sqrt{2}}{0{,}42}$.
Ratkaisematta tukin alkueräistä pituutta hirren pituus saadaan myös esimerkiksi yhtälöllä
$\dfrac{h}{8{,}6} = \dfrac{0{,}21 - 0{,}075\sqrt{2}}{0{,}16}$.)

6. 3,9 km (Olkoon C radan suorien osuuksien jatkeiden leikkauspiste. Tällöin $\sphericalangle BCA = 180° - 48° = 132°$. Janat CA ja CB sivuavat ympyrää, jonka kaari 3,0 km:n kaarre on, kaaren päätepisteissä. Kaaren keskuskulma on 48°. Ratkaistaan ympyrän kehän pituus (22,5 km) ja edelleen ympyrän säde r ja suorien osuuksien jatkeiden pituus on $(r \tan 24°)$. Janan AB pituus saadaan kosinilauseella kolmiosta ABC.)

Sarja E

1. 1,46 m (Hyllykön pohjan lävistäjän tulee olla lyhyempi kuin 1,60 m.)

2. 5,2 kg (Teräskuoren tilavuus on $\frac{4}{3}\pi \cdot 9{,}05^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 8{,}35^3$ (cm^3).)

3. 3,7 km (Kuviosta voidaan laskea kolmion LAB (L = laiva) kulman B suuruus 13°, minkä jälkeen sivun LA pituus saadaan sinilauseella.)

4. a) kaikki kulmat tasan 60°
(Olkoon sivusärmien pituus a. Jos vastakkaiset sivusärmät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, niin pohjan lävistäjä on $a\sqrt{2}$. Pohjasärmä on $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a$, joten vaippakolmiot ovat tasasivuisia kolmioita.)
b) kantakulmat noin 54,7° ja huippukulma noin 70,5°
(Jos vaippakolmioiden korkeus on a, niin pohjasärmä on $a\sqrt{2}$.)

5. 72 km (On laskettava laivan reitin piirtämän ympyrän jänteen pituus. Jänteen ja jänteen päätepisteeseen piirretyn säteen välinen kulma saadaan kosinilauseella kolmiosta, jonka sivut ovat 48 km, 41 km ja 32 km.)

6. $\frac{\sqrt{8}}{3} \cdot 360° \approx 339°$
(Sivuamisympyrä erottaa kartiosta pienemmän ympyräkartion, jonka pohjan säde on $\frac{r}{3}$.
Ympyräkartion sivujana s ratkaistaan yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista saadusta yhtälöstä $s : \frac{r}{3} = r : \frac{r\sqrt{8}}{3}$, josta $s = \frac{r}{\sqrt{8}}$.)

Sanasto

Sanastossa on eräiden tavallisten geometristen käsitteiden määritelmiä ja perusominaisuuksia.

avaruuslävistäjä
Jana, joka yhdistää kahta monitahokkaan kärkeä (ei saman tahkon kärkenä olevaa).

kehäkulma
Kovera kulma, jonka kärki on ympyrän kehällä ja jonka kyljet ovat ympyrän jänteitä.

keskijana
Kolmion kärjestä vastakkaisen sivun keskipisteeseen piirretty jana. Tunnetaan myös nimellä *mediaani*.

keskinormaali
Janan keskinormaali on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

keskuskulma
Kulma, jonka kärki on ympyrän keskipisteessä.

korkeusjana
Kolmion kärjestä vastakkaiselle sivulle tai sen jatkeelle kohtisuoraan piirretty jana.

kovera kulma
Kulma, joka on pienempi kuin oikokulma ($0° < \alpha < 180°$).

kulman puolittaja
Kulman kärkipisteen kautta kulkeva suora, joka jakaa kulman kahteen yhtä suureen osaan.

kupera kulma
Kulma, joka on suurempi kuin oikokulma ja pienempi kuin täysikulma ($180° < \alpha < 360°$).

lävistäjä
Jana, joka yhdistää kaksi monikulmion (ei vierekkäistä) kärkeä.

mediaani
Katso *keskijana*.

monitahokas
Avaruuden kappale, jota rajaavat toisensa leikkaavat tasot. Esimerkiksi pyramidit ja särmiöt ovat monitahokkaita.

neliö
Nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat yhtä suuret (90°). Neliö on säännöllinen nelikulmio.

neljäkäs
Nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät.
Tunnetaan myös nimellä *vinoneliö*.
Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan (todistetaan kurssissa Vektorit).

nollakulma
Kulma, jonka asteluku on 0°.

normaali
Suoran normaali on sitä vastaan kohtisuora suora.

oikokulma
Kulma, jonka asteluku on 180°.

puolisuunnikas
Nelikulmio, jossa on kaksi keskenään yhdensuuntaista sivua.

pyramidi
Kartio, jonka pohja on monikulmio.
Pyramidi on myös monitahokas.

ristikulmat
Kahden suoran leikatessa muodostuvat vastakkaiset kulmat. Ristikulmat ovat yhtä suuret.

segmentti
Kaaren ja sen päätepisteitä yhdistävän jänteen rajaama ympyrän osa.

sektori
Keskuskulman kylkien rajaama ympyrän osa.

suorakulmainen kolmio
Kolmio, jonka yksi kulma on suora (90°).

suorakulmio
Nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria (90°).

suplementtikulma
Kaksi kulmaa, joiden summa on oikokulma (180°), ovat toistensa suplementtikulmia.

suunnikas
Nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, ja toisaalta jokainen nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät on suunnikas.
Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa (todistetaan kurssissa Vektorit).

särmiö
Lieriö, jonka pohja on monikulmio. Särmiö on myös monitahokas.

särmä
Särmiössä, pyramidissa tai yleisesti monitahokkaassa kahdelle tahkolle yhteinen jana.

säännöllinen monikulmio
Monikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat yhtä suuret.

tahko
Monitahokasta (kuten särmiötä ja pyramidia) rajaava monikulmio.

tasakylkinen kolmio
Kolmio, jossa on kaksi yhtä pitkää sivua (ns. kyljet).
Kolmatta sivua kutsutaan kannaksi. Kylkien välinen kulma on huippukulma, ja kannan ja kylkien väliset kulmat ovat kantakulmia.
Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Huipusta kannalle piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.
Jos kolmiossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, kolmio on tasakylkinen.

tasakylkinen puolisuunnikas
Nelikulmio, jossa on kaksi keskenään yhdensuuntaista sivua ja jonka kaksi muuta sivua ovat yhtä pitkät.

tasasivuinen kolmio
Kolmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät.
Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat myös yhtä suuret, suuruudeltaan 60°.
Kolmio, jonka kaikki kulmat ovat yhtä suuret, on tasasivuinen.
Tasasivuinen kolmio on säännöllinen kolmikulmio.

terävä kulma
Kulma, joka on suurempi kuin nollakulma, mutta pienempi kuin suorakulma
$(0° < \alpha < 90°)$.

tylppä kulma
Kulma, joka on suurempi kuin suorakulma, mutta pienempi kuin oikokulma
$(90° < \alpha < 180°)$.

täysikulma
Kulma, jonka suuruus on 360°.

vinoneliö
Katso *neljäkäs*.

vieruskulmat
Kahden suoran leikatessa muodostuvat vierekkäiset kulmat. Vieruskulmien summa on oikokulma.

Hakemisto

aksiooma 12

apupiirros 17

Fermat'n lause 57

hypoteesi 73

isoympyrä 134

kaaren pituus 96

kalotti
- määritelmä 134
- pinta-ala 137

kartio
- määritelmä ja nimityksiä 151
- tilavuus 152
- suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala 155

kavaljeeriperspektiivi 118

kehäkulma
- määritelmä 111
- kehäkulmalause 111
- puoliympyrän sisältämä kehäkulma . . 112
- samaa kaarta vastaavat kehäkulmat. . . 113

kolmio
- kulmien summa 18
- pinta-ala 67
- pinta-alan trigonometrinen kaava 69
- osien ratkaiseminen sinilauseen avulla 80
- osien ratkaiseminen kosinilauseen avulla 87

kolmioiden kulmanpuolittajalause 33

kolmioiden yhdenmuotoisuuslause (kk) . . 27

kosini
- terävän kulman 42
- yleistys tylpälle kulmalle 59
- symmetrialause 61

kosinilause 84

kovera kulma 9

kulma
- määritelmä 7
- suuruuden yksiköt. 8
- summa ja erotus 10
- suoran ja tason välinen kulma 128
- kahden tason välinen kulma 129

kultainen suorakulmio 29

kupera kulma 9

leveyspiiri. 135

lieriö
- määritelmä ja nimityksiä 144
- tilavuus 146
- suoran lieriön vaipan pinta-ala 146

maapallo 135

mittakaava 25

monikulmion kulmien summa 20

monitahokas 161

muistikolmio 55

näkökulma 21

pallo
tilavuus 137
pinta-ala 137

pallosegmentti
määritelmä 134
tilavuus 137

pikkuympyrä 134

pituuspiiri 135

Platonin kappaleet 161

puolisuunnikas
määritelmä 67
pinta-ala 67

pyramidi 152

Pythagoraan kolmikko. 57

Pythagoraan lause 50

Pythagoraan lause avaruudessa 119

Pythagoraan lauseen käänteislause 84

ristikulmat 11

samankohtaiset kulmat 12

segmentti (ympyrän)
määritelmä 95
pinta-alan laskeminen 98

sektorin pinta-ala 96

sini
terävän kulman. 42
yleistys tylpälle kulmalle 59
symmetrialause 61

sinilause 75

suplementtikulma 61

suunnikas
määritelmä. 16
suunnikkaan kulmat 17
pinta-ala. 67

särmiö 144

säännöllinen monikulmio 45

säännöllinen monitahokas. 161

tangentti (terävän kulman) 42

tangentti (ympyrän) 103

trigonometrinen suhde 41

ulkokulma 23

vastinosa 25

vieruskulmat 11

yhdenmuotoisuus
kuvioiden yhdenmuotoisuus 25
yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alat 35
yhdenmuotoisten kappaleiden
tilavuudet. 121

yhdenmuotoisuussuhde. 25

ympyrä
kehän pituus 93
pinta-ala. 93

ympyrän sisään piirretty monikulmio. . . . 46

Pituuden, pinta-alan ja tilavuuden yksiköitä

Perusyksiköiden kerrannaiset ilmaistaan latinalaisperäisillä etuliitteillä.

etuliite	perusyksiköiden määrä
kilo	tuhat
desi	kymmenesosa
sentti	sadasosa
milli	tuhannesosa

Pituus

Perusyksikkö on metri (m). Kilometri on tuhat metriä, 1 km = 1 000 m. Peräkkäisten yksiköiden metri (m), desimetri (dm), senttimetri (cm) ja millimetri (mm) suhde on 10.

Esimerkiksi:

$1{,}38 \cdot 10^7$ mm = $1{,}38 \cdot 10^6$ cm

= $1{,}38 \cdot 10^4$ m = 13 800 m = 13,8 km

Pinta-ala

Koska peräkkäisten pituusyksiköiden metri (m), desimetri (dm), senttimetri (cm) ja millimetri (mm) suhde on 10, niin vastaavien pinta-alan yksiköiden suhde on $10 \cdot 10 = 100$.

Tavallisia neliömetriä suurempia kerrannaisyksikköjä ovat:

aari	1 a = 100 m^2
hehtaari	1 ha = 100 a = 10 000 m^2
neliökilometri	1 km^2 = 100 ha = 10 000 a = 1 000 000 m^2 = 10^6 m^2

Esimerkiksi:

0,00079 m^2 = 0,079 dm^2 = 7,9 cm^2 = 790 mm^2

29 000 m^2 = 290 a = 2,9 ha

Tilavuus

Koska peräkkäisten yksiköiden metri (m), desimetri (dm), senttimetri (cm) ja millimetri (mm) suhde on 10, niin vastaavien tilavuuden yksiköiden suhde on $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$.

Esimerkiksi:

$5{,}4 \cdot 10^{-9}$ m^3 = $5{,}4 \cdot 10^{-6}$ dm^3 = $5{,}4 \cdot 10^{-3}$ cm^3

= 0,0054 cm^3 = 5,4 mm^3

Vetomitat

Tilavuus ilmaistaan joskus käyttämällä vetomittaa litra (l) ja sen kerrannaisyksiköitä desilitra (dl), senttilitra (cl) ja millilitra (ml), joiden suhde on 10.

1 l = 1 dm^3
1 dl = 0,1 l
1 cl = 0,01 l
1 ml = 0,001 l = 1 cm^3

Esimerkiksi:

9,6 cl = 0,096 l = 0,096 dm^3 = 96 cm^3

480 cm^3 = 0,48 l = 4,8 dl = 48 cl